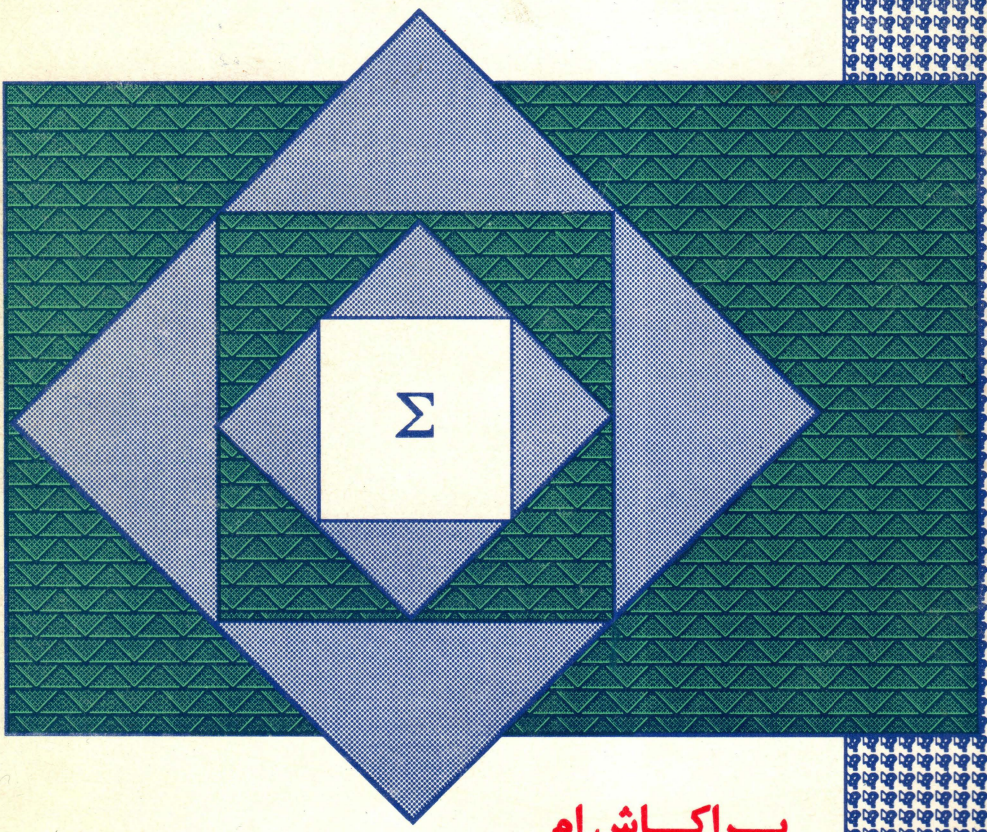
دنباله‌ها و سریهای نامتناهی



پراکاش ام

ترجمه : امیر دانشگر

با بیش از سیصد مثال حل شده

خودآموز و راهنمای حل مسائل

دنباله‌ها و سریهای نامتناهی

« با بیش از سیصد مثال حل شده »

پراکاش ام

ترجمهٔ امیر دانشگر

دانشگاه آزاد اسلامی واحد سبزوار

● سبزوار - میدان دکتر علی شریعتی ، بلوار پاسداران ، خیابان دانشگاه

● کدپستی : ۹۶۱۸۸/۱۳۱ تلفن : ۴۶۸۱۰ - ۴۷۸۷۱ فاکس: ۴۷۵۱۳

نام کتاب : دنباله‌ها و سریهای نامتناهی

تالیف : پراکاش ام

مترجم : امیر دانشگر

ویراستار : سید محمود طالبیان

چاپ اول : سال ۱۳۷۵

تیراژ : ۳۰۰۰

ناشر : دانشگاه آزاداسلامی - سبزوار

حروفچینی و صفحه آرایی : معاونت پژوهشی دانشگاه آزاداسلامی - سبزوار

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه آزاد اسلامی واحد سبزوار می‌باشد

==========

فهرست مطالب

پیشگفتار مترجم

فصل اول : دنباله‌ها

تعریف دنباله	۱
کران دنباله	۳
دنباله یکنوا	۱۲
دنباله همگرا	۱۶
دنباله واگرا	۲۴
رفتار دنباله یکنوا	۲۶
جبر حدود دنباله‌ها	۴۵
اصل عمومی همگرائی کوشی	۵۵
زیر دنباله	۸۴
دنباله کوشی	۹۰
نقاط انباشتگی یک دنباله	۱۰۵
حد زبرین و زیرین یک دنباله	۱۱۱

فصل دوم: سریهای نامتناهی

تعریف سری نامتناهی	۱۲۳
آزمون سری هندسی	۱۲۷
معیار کوشی	۱۳۰
آزمون سریهای متناوب و آزمون لایپنیتس	۱۳۳
سریهای با جمل مثبت	۱۴۳
آزمون تراکم کوشی	۱۴۸
آزمون مقایسه	۱۵۱
آزمون ریشه کوشی	۱۷۰
آزمون دالامبر	۱۷۹
آزمون رابه	۱۹۸
آزمون دمورگان و برتراند	۱۹۹
آزمون گاوس	۲۰۰
آزمون لگاریتم	۲۱۰
آزمون انتگرال	۲۱۳

فصل سوم : سریهای نامتناهی «دنباله بحث»

سری توانی و همگرایی آن	۲۲۳
شعاع و بازه همگرایی	۲۲۵
آزمون آبل	۲۳۳
آزمون دیریکله	۲۳۷
تجدید آرایش جمل یک سری	۲۴۳

بسم الله الرحمن الرحیم

استاد محترم آقای امیر دانشگر که سالها است تدریس دروس ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی سبزوار را به عهده دارند، موفق شده اند کتاب حاضر «دنباله ها و سریهای نامتناهی» را که تالیف ریاضی دان معروف «پرکاش ام» می باشد، با مهارت خاص به فارسی روان برگردانند. ترجمه این کتاب را که مطابق با معیارهای مشخص و قابل درک و فهم دانشجویان رشته ریاضی می باشد به این استاد جوان تبریک و تهنیت می گوییم و از درگاه ایزد منان مزید توفیقات ایشان را خواستاریم.

سید محمود صانعی رئیس دانشگاه آزاد اسلامی سبزوار

پیشگفتار مترجم

دنباله‌ها و سری‌های نامتناهی از مهمترین مفاهیم ریاضی به شمار می‌آیند و فراگیری آن برای دانشجویان علوم پایه و مهندسی، که باید ریاضی را به خوبی بیاموزند، الزامی است. کتاب حاضر که در حقیقت راهنمای حل مسائل متنوع در دنباله‌ها و سریهای نامتناهی است، به عنوان یک خود آموز ضمن آشنا کردن دانشجویان عزیز به مفاهیم کلی ریاضی، آنها را در مراحل مختلف حل مسائل، از ساده به مشکل راهنمائی می‌نماید.

این کتاب به دو دلیل اساسی برای ترجمه برگزیده شده است. اول عدم وجود کتب مرجع کافی

در این زمینه که خود مشکلات زیادی را برای دانشجویان عزیز فراهم می‌سازد، دوم متن ساده و وجود مسائل متنوع همراه با حل آنها در کتاب حاضر، که دانشجویان با اتخاذ یک روش مناسب می‌توانند به صورت بهینه از آن استفاده نمایند.

هر نوع راهنمایی و یادآوری اساتید ارجمند و دانشجویان گرامی برای بهبود چاپ آینده کتاب مورد استقبال گرم مترجم قرار گرفته و موجب سپاس قلبی اوست.

در اینجا از همکاری صمیمانه دوست و همکار عزیز خود آقای سید محمود طالبیان که ویرایش علمی و ادبی این کتاب را به عهده داشتند و در تصحیح و آماده سازی آن برای چاپ کوشش فراوان نمودند، کمال تشکر را دارم. همچنین از معاونت محترم پژوهشی دانشگاه آزاد اسلامی واحد سبزوار جناب آقای مهندس صفار سبزوار و مدیر محترم پژوهش آقای حسن محتشم بخاطر همکاری لازم جهت فراهم سازی مقدمات چاپ کتاب و آقایان علی اکبر ریائی ، حسین توبکانلو و حسن ثمینی که تنظیم و صفحه‌آرائی کتاب را تقبل نمودند کمال تشکر را دارم.

امیر دانشگر

بهار ۷۳

فصل اول:

دنباله‌ها

در این فصل به معرفی مفاهیم تابع و دنباله می پردازیم.

۱.۱: بخش اول

تعریف تابع: فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. اگر قاعده‌های مانند f موجود باشد بطوریکه هر a از A را با یک عضو منحصر بفرد مانند b از B وابسته سازد، آنگاه f یک تابع از A به B می نامند و به صورت:

$$A \xrightarrow{f} B \qquad \text{یا} \qquad f : A \longrightarrow B$$

نمایش میدهند و میخوانند: f تابعی از A به B است، یا f تابعی است که A را بر B می‌نگارد. تابع را نگاشت یا تناظر نیز می نامند.

عضو b را تصویر a تحت تابع f می‌نامند و آن را به صورت $b = f(a)$ می نویسند، که خوانده می‌شود: مقدار تابع f به ازای a.

تعریف: مجموعه A را "دامنه f" و مجموعه B را "هم‌دامنه f" می نامند.

تعریف: مجموعه $\{ f(x) : x \in A \}$، یعنی مجموعه تصاویر اعضای A تحت تابع f، رابرد تابع f می نامند. توجه کنید که برد f زیرمجموعه هم‌دامنه f است.

در این فصل نوع خاصی از توابع را مورد بحث قرار می دهیم که دامنه آنها مجموعه اعداد طبیعی N است.

۱.۲: بخش دوم

تعریف دنباله: تابعی که دامنه آن مجموعه اعداد طبیعی N و برد آن زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی R باشد یک دنباله از اعداد حقیقی یا به طور خلاصه، دنباله خوانده می شود.

اگر $X: N \longrightarrow R$ یک دنباله باشد، تصویر $n \in N$ ، را به جای $X(n)$، معمولا با X_n نشان می دهیم. بنابر این X_1، X_2، X_3 و ... اعدادی حقیقی وابسته اعداد طبیعی ۱،۲،۳،... در این نگاشت می باشند.

در این جا X_n را جمله عمومی یا جمله n ام دنباله می نامند.

از این رو X_1، X_2، X_3 و ... به ترتیب، جمله اول ، جمله دوم ، جمله سوم ، ... دنباله‌اند.

اگر جمله n ام یک دنباله مفروض باشد و مقادیر ۱، ۲، ... را به جای n قرار دهیم، جمله‌های اول ، دوم ، ... ، را بدست می آوریم.

به این دلیل است که دنباله X را به صورت $\{X_n\}$ یا $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ نمایش می‌دهند.

توجه کنید جمل دنباله الزاما متمایز نیستند.

تعریف دنباله ثابت:

اگر هر X_n مساوی عدد ثابت c باشد، $\{X_n\}$ را یک دنباله ثابت می نامند. در این حالت، $\{X_n\} = \{c, c, c, \dots\}$. برد این تابع مجموعه تک عضوی $\{c\}$ است.

توضیحات:

۱) دنباله $n = ۱, ۲, \dots$ ، $X_n = n^۲$ برابربا $۱^۲, ۲^۲, ۳^۲, \dots, n^۲, \dots$ است .

۲) دنباله $n = ۱, ۲, \dots$ ، $X_n = \frac{۱}{n}$ برابر است با $۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{٤}, \dots$

۳) دنباله $n = ۱, ۲, \dots$ ، $X_n = \sqrt{n}$ برابربا $۱, \sqrt{۲}, \sqrt{۳}, \sqrt{٤}, \dots$ است

٤) دنباله $n = ۱, ۲, \dots$ ، $X_n = \frac{n}{n+۱}$ برابربا $\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{٤}, \dots$ است

۵) دنباله $n = ۱, ۲, \dots$ ، $X_n = (-۱)^n$ برابربا $-۱, ۱, -۱, ۱, \dots$ است .

تبصره ۱: هر دنباله همیشه بی نهایت جمله دارد، اگر چه امکان دارد که بردش متناهی باشد. به عنوان مثال، برد هر یک از دنباله‌های ۱ تا ٤، یک مجموعه نامتناهی است و برد دنباله ۵ ،

عبارتست از $\{1,-1\}$، که یک مجموعه متناهی است. به تفاوت بین برد دنباله وخود دنباله توجه کنید.

تبصره ۲: در تعریف دنباله، گاهی به جای این که اعداد حقیقی رامتناظر اعداد طبیعی ۱،۲، ۳،...، قرار دهیم، این تناظر را با اعداد صحیح نامنفی ۰، ۱،۲،۳،۴،۵، ...، برقرار می‌کنیم، یعنی، دنباله را نگاشتی مانند، $X = N\cup\{0\} \to R$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، جمله متناظر ۰ را با X_0 نشان می‌دهیم.

به عنوان مثال، دنباله: $X_n = \frac{1}{n+1}$ ، $n = 0, 1, 2, \ldots$ عبارتست از:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

تعریف دو دنباله مساوی:

دو دنباله $\{X_n\}$، $\{Y_n\}$ را مساوی گوئیم در صورتی که به ازای هر n ، $X_n = Y_n$

مثلا اگر $X_n = (-1)^n$ و $Y_n = (-1)^{n+1}$ ، برد هر دو دنباله (که متشکل از اعداد ۱ و ۱- است) یکسان است ولی دو دنباله مساوی نیستند، زیرا، $X_1 = -1$ ، $Y_1 = +1$

۳۰۱ : بخش سوم

کران دنباله

تعریف: دنباله $\{X_n\}$ را از بالا کراندار نامند، در صورتی که عددی حقیقی مانند M موجود باشد به طوری که به ازای هر n ، $X_n \leq M$

یعنی، در صورتی که برد دنباله از بالا کراندار باشد.

تعریف: دنباله $\{X_n\}$ را از پایین کراندار نامند در صورتی که عددی حقیقی مانند m موجود باشد به طوری که به ازای هر n ، $m \leq X_n$

یعنی در صورتی که برد دنباله از پایین کراندار باشد.

تعریف: دنباله $\{X_n\}$ را کراندار از نامیم در صورتی که اعدادی حقیقی مانند m, M موجود باشند به طوری که به ازای هر n ، $m \leq X_n \leq M$

واضح است کـه یک دنبـالـه کرانـدار است اگر و فقط اگر این دنباله از بالا و پایین کراندار باشد.

مثلا دنباله $\{X_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ کراندار است ، زیرا که به ازای هر n ، $0 < X_n \leq 1$

تعریف: یک دنبـالـه را بی کـران نامیم در صورتی که این دنباله کراندار نباشد. بنابراین، دنباله ای بی کران باشد یکی از حالتهای زیر برقرار است:

۱) این دنباله از بالا کراندار است، اما از پائین کراندار نیست .

۲) این دنباله از پائین کراندار است، اما از بالا کراندار نیست .

۳) این دنباله نه از پائین کراندار است نه از بالا.

به عنوان مثال دنباله‌های $\{n^3\}$ و $\{(-1)^n . n^2\}$ بی کرانند.

تعریف: دنبـالـه $\{X_n\}$ را از بالا بی کران گوئیم در صورتی که به ازای هر $M>0$ عددی طبیعی مانند m وجود داشته باشد به طوریکه $X_m>M$.

تبصره: اگر هر X_n مثبت و $\{X_n\}$ بی کران باشد، این دنباله از بالا بی کران است.

تعریف: دنبـالـه $\{X_n\}$ را از پـائین بی کران گوئیم در صورتی که به ازای هر عدد حقیقی $M<0$ عددی طبیعی مانند m وجود داشته باشد به طوریکه $X_m< M$.

تبصره: اگر X_n منفی و دنباله $\{X_n\}$ بی کران باشد، این دنباله از پائین بی کران است.

کرانهای یک دنباله کراندار

اگـر دنباله $\{X_n\}$ کراندار باشد، برد این دنباله (که، به استناد تعریف دنباله، یک مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی است) نیز کراندار است. بنابراین به استناد اصل موضوع کمال و کاربرد آن، بـرد دنباله $\{X_n\}$ دارای کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پائین است که آنها را، به ترتیب، L و U می نامیم .

توضیحات:

۱) دنباله $\{(-1)^n\}$ کراندار است. اعداد ۱ و ۱- ، به ترتیب، کرانهای بالا و پائین دنباله‌اند.

۲) دنباله $\{\frac{1}{n}\}$ نیز کراندار است. ۱ کران بالا و ۰ کران پائین این دنباله می باشد.
۳) دنباله $\{n^2\}$ از بالا کراندار نمی باشد، اما از پائین کراندار است و ۱ کران پائین آن است.
٤) دنباله $\{(-2)^n\}$ نه از بالا کران دار است و نه از پائین.

٤٠١: بخش چهارم

خواص کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پائین.
کوچکترین کران بالای دنباله $\{X_n\}$، که آن را u نامیدیم، دارای خواص زیر است:
۱) به ازای هر n ، $X_n \leq u$.
۲) به ازای هر $\varepsilon > 0$ حداقل یک $m \in N$ موجود است به طوریکه $X_m > u - \varepsilon$.
بزرگترین کران پائین دنباله $\{X_n\}$ ، که آن را L نامیدیم ، دارای خواص زیر است:
۱) به ازای هر n ، $X_n \geq L$.
۲) به ازای هر $\varepsilon > 0$ حداقل یک $m \in N$ موجود است به طوریکه $X_m < L + \varepsilon$.

۵٠١: بخش پنجم

قضیه: دنباله $\{X_n\}$ کراندار است اگر و فقط اگر عددی حقیقی مانند M موجود باشد به طوری‌که به ازای هر n ، $|X_n| < M$

برهان حکم اول: فرض می کنیم عددی حقیقی مانند M موجود باشد به طوری که به ازای هر n ، $|X_n| < M$. آن گاه،
به ازای هر n ، $-M < X_n < M$. بنابراین دنباله $\{X_n\}$ کراندار است.

برهان حکم دوم: فرض می کنیم $\{X_n\}$ کراندار است. بنابراین،
(۱) دو عدد حقیقی h و k موجودند به طوریکه به ازای هر n ، $h < X_n < k$.

اگر فرض کنیم $M=\max\{|h| \text{ و } |k|\}$, خواهیم داشت: $|h|\le M$ و $|k|\le M$.

$$-M<h<M \text{ و } -M<k<M \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که به ازای هر n، $-M<X_n<M$ یا $|X_n|<M$.

مثال ۱) نشان دهید که دنباله $\{X_n\}$ با جمله عمومی زیر کراندار است:

۱) $X_n=\dfrac{n}{n+۱}$

۲) $X_n=\dfrac{n}{n^۲+۱}$

۳) $X_n=(۱+\dfrac{۱}{n})^n$

۴) $X_n=۱+\dfrac{۱}{۳}+\dfrac{۱}{۳^۲}+\dots+\dfrac{۱}{۳^n}$

۵) $X_n=\dfrac{۱}{n^۲}+\dfrac{۱}{(n+۱)^۲}+\dots+\dfrac{۱}{(۲n)^۲}$

حل ۱:

$$X_n=\frac{n}{n+۱}=\frac{n+۱-۱}{n+۱}=۱-\frac{۱}{n+۱}<۱ \quad ، n\in N$$

$$۰<X_n \quad ، n\in N$$

از این رو، به ازای هر n، $۰<X_n<۱$ و $\{X_n\}$ کراندار است

حل ۲:

$$X_n=\frac{n}{n^۲+۱}<\frac{n}{n+۱}<\frac{n}{n}=۱ \quad ، n\in N$$

$$۰<X_n \text{ ، } n\in N$$

از این رو، به ازای هر n ، $0<X_n<1$ و $\{X_n\}$ کراندار است.

حل ۳ :

$$X_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\dots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$ [با استفاده از بسط دو جمله‌ای نیوتن]

$$=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\times 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\dots+\frac{n(n-1)\cdots[n-(n-1)]}{1\times 2\times 3\times 4\times\dots\times n}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1\times 2}+\dots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-n-\frac{1}{n}\right)}{1\times 2\times 3\times 4\times\dots\times n}$$

$$<1+1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{1\times 2\times 3}+\dots+\frac{1}{1\times 2\times 3\times\dots\times n}$$

[زیرا، به ازای $k=1,2,3,\dots,n-1$ ، $\left(1-\frac{k}{n}\right)<1$]

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 2}+\dots+\frac{1}{\underbrace{2\times 2\times\dots\times 2}_{n-1\ \text{عامل}}}$$

$$=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right\}=1+\frac{1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

[زیرا جمل مجموع $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}$ تشکیل یک تصاعد هندسی می‌دهند با جمله اول $a=1$ و قدر نسبت $r=\frac{1}{2}$]

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}=1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1+2-\frac{1}{2^{n-1}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

از این رو به ازای هر n ، $X_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$.

همچنین، از (۱) نتیجه می شود که :

$$X_n=1+1+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}>1+1$$

به این ترتیب، به ازای هر n ، $2<X_n<3$ ، بنابراین ، $\{X_n\}$ کراندار است.

حل ٤):

$$X_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}$$

$$=\frac{1\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times 3^n}<\frac{3}{2}$$

$0<X_n$ ، $n\in N$

به این ترتیب، به ازای هر n ، $0<X_n<\frac{3}{2}$ و بنابراین ، $\{X_n\}$ کراندار است.

حل ۵):

$$X_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}$$

$$<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\quad (n+1)\text{جمله}$$

$$=\frac{n+1}{n^2}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}<1+1=2$$

$0<X_n$ ، $n\in N$

به این ترتیب، به ازای هر n ، $0 < X_n < 2$ و بنابراین ، $\{X_n\}$ کراندار است.

مثال ۲) نشان‌دهید که‌دنباله $\{X_n\}$ با جمله عمومی‌زیر بی کران است:

۱) $X_n = \dfrac{n^2+1}{2n+3}$

۲) $X_n = \alpha^n \quad (\alpha > 1)$

۳) $X_n = (-5)^n$

۴) $X_n = 2 - n^2$

۵) $X_n = n - n^2$

حل ۱:

$0 < X_n \ , \ n \in N$

بنابراین دنباله $\{X_n\}$ از پایین کراندار است. حال اگر این دنباله بی‌کران باشد. الزاماً از بالا بی کران است. بنابراین ، (بنا به تعریف بخش ۳) باید نشان دهیم که به ازای هر $M > 0$ (به قدر دلخواه بزرگ) عددی طبیعی مانند m موجود است به طوری که $X_m = \dfrac{m^2+1}{2m+3} > M$.

اثبات از این قرار است: نامساوی $X_n > M$ ، وقتی برقرار است که یکی از نامساویهای زیر برقرار باشد:

$$n^2 + 1 > 2nM + 3M$$

$$n^2 - 2Mn + (1 - 3M) > 0$$

$$(n-\alpha)(n-\beta) > 0 \qquad (1)$$

در نامساوی (۱) α و β ریشه های معادله $n^2 - 2Mn + (1 - 3M) = 0$ فرض شده است .

بنابراین: $\alpha = M + \sqrt{(M + \frac{3}{2})^2 - \frac{13}{4}}$ و $\beta = M - \sqrt{(M + \frac{3}{2})^2 - \frac{13}{4}}$ واضح است که اگر $n > \alpha$ و $n > \beta$, نامساوی (۱) مطمئنا درست خواهد بود. از این رو، اگر عدد صحیح ومثبت m از هر دو عدد α, β بزرگتر باشد ، ملاحظه می کنیم که $X_m = \dfrac{m^2+1}{2m+3} > M$ ، که نشان می دهد که دنباله $\{X_n\}$ از بالا کراندارنیست و در نتیجه‌کراندار نمی باشد.

حل ۲:

داریم $n \in N$ ، $0 < X_n$

نتیجه می گیریم که $\{X_n\}$ از پایین کراندار است. بنابراین، $\{X_n\}$ بی کران خواهد بود اگر از بالا بی کران باشد اگر $M > 0$ (به قدر دلخواه بزرگ) مفروض باشد، نامساوی $X_n > M$ وقتی برقرار است که یکی از نامساویهای زیر بر قرار باشد:

$$\alpha^n > M$$

$$n \log\alpha > \log M$$

$$n > \frac{\log M}{\log\alpha}$$

اگر عدد صحیح و مثبت m را طوری انتخاب کنیم که $m > \frac{\log M}{\log\alpha}$ ، متوجه می شویم که:

$$X_m = \alpha^m > M$$

که نشان می دهد که $\{X_n\}$ از بالا کراندار نیست و، از این رو کراندار نیست

حل ۳:

$X_n > 0$ اگر n زوج باشد و $X_n < 0$ اگر n فرد باشد. بنابراین $|X_n|$ را در نظر می گیریم. حال $|X_n| > 0$. بنابراین، $\{|X_n|\}$ یک دنباله بی کران است اگر $\{|X_n|\}$ از بالا بی کران باشد. اگر $M > 0$ مفروض باشد، نامساوی $|X_n| = |(-5)^n| = |-5|^n = 5^n > M$ برقراراست در صورتی که: $n \log 5 > \log M$ یا $n > \frac{\log M}{\log 5}$

در نتیجه، با انتخاب یک عدد صحیح مثبت m که $m > \frac{\log M}{\log 5}$ می بینیم که $|X_m| > M$ این نامساوی نشان می دهد که $X_m > M$ یا $X_m < -m$ ، یعنی $\{X_n\}$ یا از بالا بی کران است یا از پایین و از این رو، بی کران است.

حل ٤:

$$X_n = 2 - n^2 < 2 \quad , \quad n \in N$$

از این رو $\{X_n\}$ از بالا کراندار است و نتیجه می گیریم که $\{X_n\}$ کراندار نخواهد بود در

صورتی که از پایین کراندار نباشد. یعنی به ازای هر $M > 0$ (به قدر دلخواه بزرگ) عددی صحیح مانند m باشد به طوریکه $X_m < -M$. حال، $X_n < -M$ به شرط آن که $2 - n^2 < -M$ و این نامساوی وقتی برقرار است که:

$$n > \sqrt{2+M} \quad (2+M > 0) \quad \text{یا} \quad n^2 > 2+M$$

بنابراین با انتخاب عدد صحیح مثبت m که $m > \sqrt{2+M}$، خواهیم داشت $X_m < -M$. در نتیجه، $\{X_n\}$ از پایین کراندار نمی باشد.

حل ۵:

$$X_n = n - n^2 \leq 0 \ , \ n \in N$$

نتیجه می گیریم که $\{X_n\}$ از بالا کراندار است. بنابراین، دنباله $\{X_n\}$ بی کران خواهد بود در صورتی که این دنباله از پایین بی کران باشد.

به ازای هر $M > 0$ (به قدر دلخواه بزرگ) نامساوی $X_n < -M$ برقرار است به شرط آنکه یکی از نامساویهای زیر برقرار باشد:

$$n - n^2 < -M$$

$$n^2 - n - M > 0$$

$$(n-\alpha)(n-\beta) > 0 \qquad (1)$$

که β و α ریشه های $n^2 - n - M = 0$ می باشند یعنی:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{1+4M}}{2} \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{1+4M}}{2}$$

اگر $n > \alpha$, $n > \beta$ نامساوی (۱) درست است.

بنابراین با انتخاب یک عدد صحیح مثبت m به طوری که m از هر دو عدد فوق بزرگتر باشد، نتیجه می گیریم که $X_m < -M$. لذا $\{X_n\}$ از پایین کراندار نمی باشد.

۶۰۱: بخش ششم

دنباله یکنوا:

تعریف: دنباله $\{X_n\}$ را صعودی می‌نامند در صورتی که به ازای هر n ،

$X_{n+1} \geq X_n$

و آنرا اکیدا صعودی نامند در صورتی که به ازای هر n ، $X_{n+1} > X_n$

تعریف: دنباله $\{X_n\}$ را نزولی می‌نامند در صورتی که به ازای هر n ، $X_{n+1} \leq X_n$

و آنرا اکیدا نزولی نامند در صورتی که به ازای هر n ، $X_{n+1} < X_n$

*: دنباله $\{X_n\}$ را یکنوا می‌نامند در صورتی که یاصعودی باشد یانزولی.

توضیحات:

۱: دنباله $\{\frac{1}{n}\}$ اکیدا نزولی است.

۲: دنباله $\{n^2\}$ اکیدا صعودی است.

۳: دنباله $\{(-1)^n\}$ نه صعودی است و نه نزولی.

۴: اگر $X_n = 3$ ، $n<3$ و $X_n = n$ ، $n>3$

آن گاه: $X_1 = X_2 = X_3$ ، $X_3 < X_4 < X_5 < \cdots$

که نشان می دهد که $\{X_n\}$ صعودی است اما نه اکیدا صعودی.

۵: اگر

$X_n = n$ ، اگر n فرد باشد

$= n-1$ ، اگر n زوج باشد

آن گاه

$$X_1 = 1 \quad X_2 = 2-1 = 1 \quad X_3 = 3 \quad X_4 = 4-1 = 3 \text{ و } \cdots$$

بنابراین ،

$$X_1 = X_2 \,,\; X_2 < X_3 \,,\; X_3 = X_4 \,,\; X_4 < X_5 \,,\; X_5 = X_6 \,,\; \cdots$$

که نشان می دهد که دنباله $\{X_n\}$ صعودی است ولی اکیدا صعودی نیست.

تبصره: چنین نیست که هر دنباله‌ای یکنوا باشد. مثلا دنباله $X_n=\{(-1)^n\}$ ، که عبارت است از:

$$-1, 1, -1, 1, \dots$$

نه صعودی است و نه نزولی.

مثال ۳) نشان دهید که دنباله های زیر یکنوایند و تعیین کنید که صعودی هستند یا نزولی.

الف) $\frac{1}{(n-1)!}+\dots+\frac{1}{2!}+\frac{1}{1!}+1$ د) $\frac{2n+7}{3n+8}$

ب) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$ ه) $(1+\frac{1}{n})^n$

ج) $-\frac{1}{2n+1}$ و) $X_1=1\ ,\ X_n=\sqrt{2+X_{n-1}}$ و $n\geq 2$

حل الف:

$$X_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{(n-1)!}$$

اگر n را $n+1$ تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$X_{n+1}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}$$

از این رو:

$$X_{n+1}-X_n=(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!})-(1+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{(n-1)!})$$

$$=\frac{1}{n!}>0$$

بنابراین به ازای هر n ، $X_{n+1}>X_n$ و نتیجه می گیریم که دنباله $\{X_n\}$ اکیدا صعودی است.

حل ب:

$$X_n=(1+\frac{1}{n})^n$$

$$X_n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n(n-1))}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}) \qquad (1)$$

با تبدیل n به n+1 در (۱) داریم:

$$X_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})+\cdots$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1}) \qquad (2)$$

اما:

$$1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n+1}\quad,\quad 1-\frac{2}{n}<1-\frac{2}{n+1}$$

و به‌طور کلی:

$$1-\frac{k}{n}<1-\frac{k}{n+1}\quad,\quad k=1,2,3,4,5,\ldots,n$$

در نتیجه از (۱) و (۲) معلوم می‌شود که به ازای هر n , $X_{n+1}>X_n$ لذا دنباله $\{X_n\}$ صعودی است.

حل ج:

$$X_n=\frac{-1}{2n+1}$$

با تبدیل n به n+1 داریم:

$$X_{n+1}=\frac{-1}{2(n+1)+1}=\frac{-1}{2n+3}$$

$$X_{n+1}-X_n=\frac{-1}{2n+3}+\frac{1}{2n+1}=\frac{2}{(2n+3)(2n+1)}>0$$

بنابراین به ازای هر n ، $X_{n+1}>X_n$ و در نتیجه $\{X_n\}$ اکیدا صعودی است.

حل د:

$$X_n=\frac{2n+7}{3n+8}$$

با تبدیل n به $n+1$ داریم:

$$X_{n+1}=\frac{2(n+1)+7}{3(n+1)+8}=\frac{2n+9}{3n+11}$$

$$X_{n+1}-X_n=\frac{2n+9}{3n+11}-\frac{2n+7}{3n+8}=\frac{-5}{(3n+11)(3n+8)}<0$$

بنابراین به ازای هر n ، $X_{n+1}<X_n$ و در نتیجه دنباله $\{X_n\}$ اکیدا نزولی است.

حل ه:

$$X_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$X_{n+1}-X_n=\frac{1}{n+1}>0 \quad ، n\in N$$

$$X_{n+1}>X_n \quad ، n\in N$$

در نتیجه دنباله $\{X_n\}$ اکیدا صعودی است.

حل و:

با استفاده از اصل استقرای ریاضی، ثابت می کنیم که:

(۱) $X_{n+1}>X_n$ به ازای هر n ،

اگر $n=2$ ، داریم: $X_2=\sqrt{2+X_1}=\sqrt{3}>1=X_1$

بنابراین (۱) به ازای $n=1$ برقرار است.

فرض می کنیم (۱) به ازای $n = k$ برقرار باشد. آن گاه،

$$X_{k+1} > X_k$$
$$2 + X_{k+1} > 2 + X_k$$
$$\sqrt{2 + X_{k+1}} > \sqrt{2 + X_k}$$
$$X_{k+2} > X_{k+1}$$

از این رو، (۱) بـه ازای $n = k + 1$ درست است. در نتیجـه، بـه استنـاد اصل استقـرای ریاضی، (۱) برقرار و بنابراین $\{X_n\}$ صعودی است.

۷۰۱: بخش هفتم

دنباله همگرا:

تعریف: دنباله $\{X_n\}$ را همگرا به عدد L نامیم در صورتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد صحیح مثبت مانند m موجود باشد به طوری که به ازای هر $n \geq m$، $|X_n - L| < \varepsilon$، در این صورت می نویسیم $\lim_{n \to \infty} X_n = L$ یا $X_n \to L$ وقتی که $n \to \infty$. در این حالت عدد L را حد دنباله $\{X_n\}$ می نامند.

می دانیم که نامساوی $|X_n - L| < \varepsilon$ معادل نامساویهای $L - \varepsilon < X_n < L + \varepsilon$ است از این رو به استناد تعریف بالا، دنباله $\{X_n\}$ همگراست در صورتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد صحیح مثبت m موجود باشد.

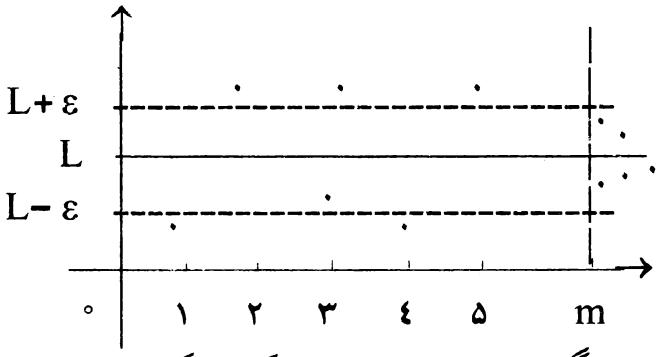
به طوری که به ازای هر $n \geq m$، $L - \varepsilon < X_n < L + \varepsilon$،

یعنی به ازای هر $n \geq m$، $X_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

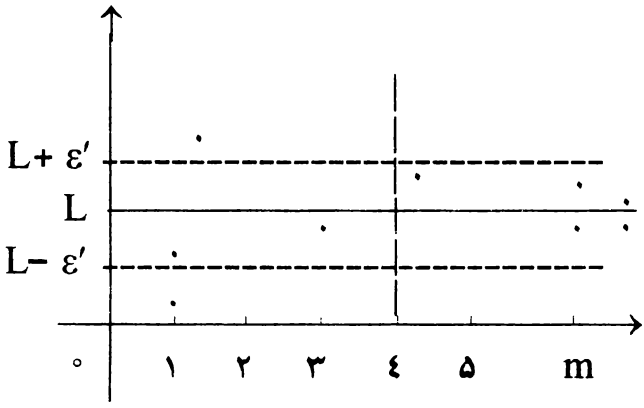
به عبارت دیگر این تعریف بیان می کند که اگر دنباله $\{X_n\}$ به L همگرا باشد، آنگاه تفـاضل جمل دنبـالـه و L بـه قدر دلخواه از مرتبه ای به بعد کوچک می شود. بنابراین می توانیم بگوییم کـه دنباله $\{X_n\}$ به L همگراست فقط وفقط وقتی که به ازای هر همسایگی $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ از L یک عدد طبیعی مانند m موجود باشد.

به طوری که به ازای هر $n \geq m$ ، $X_n \in (L-\varepsilon , L+\varepsilon)$.

تبصره: چون هر دنباله یک تابع است می توانیم نمودار آن را رسم کنیم. چون این تابع فقط در اعداد طبیعی تعریف شده است، نمودار آن در ربع اول صفحه است. حال، اگر L حد دنباله $\{X_n\}$ باشد، از نظر هندسی این به آن معنی است که اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ نواری محدود به خطوط $Y = L-\varepsilon$ و $Y = L+\varepsilon$ حول L رسم کنیم، باید یک عدد طبیعی مانند m پیدا شود به طوری که از این مرتبه به بعد جمل دنباله، بدون استثنا در داخل این نوار قرار گیرند، یعنی، همه جمل X_m، X_{m+1} ، ...، در داخل این نوار قرار گیرند.



واضح است که انتخاب m بستگی به به انتخاب ε دارد. چنان که در شکل دوم نشان داده شده است، به ازای عدد مثبت دیگری مانند $\varepsilon' > 0$ به دست می آوریم $m = ٤$ زیرا بعد از این مرتبه، همه جمل دنباله داخل نوار محدود به خطوط $Y = L-\varepsilon'$ و $Y = L+\varepsilon'$ قرار می گیرند.



۸۰۱: بخش هشتم

قضیه : حد هر دنباله همگرا منحصر به فرد است.

برهـان : فرض می کنیم که دنباله $\{X_n\}$ به دو عدد L و L' همگرا و $\varepsilon > 0$ مفروض باشـد. چـون $\{X_n\}$ به سمت L همگراست، بنا به تعریف، یک عدد صحیح و مثبت، m_1 موجود است به طوری که:

به ازای هر $n \geq m_1$ ، $|X_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

همین طـور چون $\{X_n\}$ به L' همگراست عدد صحیح و مثبت دیگری مانند m_2 موجود است به طوری که :

به ازای هر $n \geq m_2$ ، $|X_n - L'| < \frac{\varepsilon}{2}$

اگر فرض کنیم $m = \max\{m_1, m_2\}$ ، خواهیم داشت:

به ازای هر $n > m$ ، $|X_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

به ازای هر $n > m$ ، $|X_n - L'| < \frac{\varepsilon}{2}$

لذا،

$$\begin{aligned} |L - L'| &= |L - X_n + X_n + L'| \\ &\leq |L - X_n| + |X_n - L'| \\ &= |X_n - L| + |X_n - L'| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

به ازای هر $n \geq m$ ،

یعنی ،بـه ازای هـر $\varepsilon > 0$ و هـر $n > m$ ، $|L - L'| < \varepsilon$ چون ε دلخواه و سمت چپ مستقل از n است ، لازم می آید که:

$$|L - L'| = 0$$

در نتیجه ، $L - L' = 0$

یعنی ، $L = L'$

۹.۱: بخش نهم

قضیه: اگر دنباله $\{X_n\}$ همگرا باشد آن گاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند p وجود دارد به طوری که به ازای هر $n \geq p$ و $m \geq p$ ، $|X_n - X_m| < \varepsilon$

برهان: فرض کنید دنباله $\{X_n\}$ به L همگرا باشد. آن گاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند p وجود دارد به طوری که به ازای هر $n \geq p$ ، $|X_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ بنابراین اگر $n, m \geq p$ ، آن گاه

$$|X_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |X_m - L| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

از این رو:

$$\begin{aligned} |X_n - X_m| &= |X_n - L + L - X_m| \\ &\leq |X_n - L| + |L - X_m| = |X_n - L| + |X_m - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

تبصره: نتیجه بالا شرطی لازم برای همگرائی دنباله و از اهمیت زیادی برخوردار است و از آن می‌توان به عنوان یک آزمون برای اثبات عدم همگرائی دنباله استفاده نمود.

اگر دنباله $\{X_n\}$ طوری باشد که به ازای هر عدد طبیعی p و به ازای عددمثبت معینی مانند ε دو عدد طبیعی m و n موجود باشد به طوری که $n, m \geq p$ ، و

$$|X_n - X_m| \geq \varepsilon \tag{2}$$

آن گاه دنباله $\{X_n\}$ نمی تواند همگرا باشد.

زیرا اگر دنباله $\{X_n\}$ همگرا باشد به ازای هر عددمثبت دلخواه ε عددی طبیعی مانند p وجود دارد به طوری که به ازای هر $n, m \geq p$ ، $|X_n - X_m| < \varepsilon$

که با (۲) متناقض است. عکس این حکم نیز درست است که ما ان را تحت عنوان معیار همگرائی کوشی بعدا ثابت خواهیم کرد.

مثال ۱) نشان دهید که دنباله $\{\frac{1}{n}\}$ به صفر همگراست.

حل:

برای این که نشان دهیم $\{\frac{1}{n}\}$ به صفر همگراست، باید نشان دهیم که به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد طبیعی مانند m موجود است به طوریکه به ازای هر $n \geq m$ ، $|X_n - 0| < \varepsilon$.

حال نامساوی $|X_n - 0| < \varepsilon$ در صورتی برقرار است که یکی از نامساویهای زیر برقرار باشد:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

اگر عدد طبیعی m بزرگتر از $\frac{1}{\varepsilon}$ باشد آن گاه

به ازای هر $n \geq m$ ، $|X_n - 0| < \varepsilon$

و برهان تمام است.

مثال ۲) نشان دهید که دنباله $\{\frac{n+1}{n}\}$ به ۱ همگراست.

حل:

برای اینکه نشان دهیم $\{X_n\}$ به عدد ۱ همگراست، باید نشان دهیم که به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد طبیعی مانند m موجود است به طوری که به ازای هر $n \geq m$ ، $|X_n - 1| < \varepsilon$.

اما

$$|X_n - 1| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

و ملاحظه می کنیم که نامساوی $|X_n - 1| < \varepsilon$ وقتی برقرار است که یکی از نامساویهای زیر برقرار باشد:

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$$n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

حال فرض کنیم m اولین عدد طبیعی بزرگتر از $\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$ باشد، آن گاه:
به ازای هر $n \geq m$ ، $|X_n - 1| < \varepsilon$. از این رو $\{X_n\}$ به ۱ همگراست.

مثال ۳) نشان دهید که دنباله $X_n = \frac{3n-1}{4n+5}$ به $\frac{3}{4}$ همگراست.

حل:

برای این که نشان دهیم $\{X_n\}$ به $\frac{3}{4}$ همگراست باید نشان دهیم که به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد طبیعی مانند m موجود است به طوری که به ازای هر $n \geq m$ ، $\left|X_n - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon$

اما:

$$\left|X_n - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{3n-1}{4n+5} - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{12n - 4 - 12n - 15}{4(4n+5)}\right| = \left|\frac{-19}{4(4n+5)}\right|$$

$$= \frac{19}{4(4n+5)}$$

از این رو، نامساوی $\left|X_n - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon$ در صورتی به برقرار است که یکی از نامساویهای زیر برقرار باشد:

$$\frac{19}{4(4n+5)} < \varepsilon$$

$$\frac{4(4n+5)}{19} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$4n+5 > \frac{19}{4\varepsilon}$$

$$n > \frac{1}{4}\left(\frac{19}{4\varepsilon} - 5\right)$$

حال اگر فرض کنیم که m اولین عدد طبیعی بزرگتر از $\frac{1}{4}\left(\frac{19}{4\varepsilon} - 5\right)$ باشد آن گاه به ازای هر $n \geq m$ ، $\left|X_n - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon$ ، بنابراین ، $\{X_n\}$ به $\frac{3}{4}$ همگراست.

مثال ۴) اگر $X_n = \frac{1+(-1)^n}{2n}$ مقدار m را چنان تعیین کنید که:

الف) به ازای هر $n \geq m$ ، $|X_n - 1| < \frac{1}{10^3}$ ب) به ازای هر $n \geq m$ ، $|X_n - 1| < \varepsilon$

حل الف:

$$|X_n - 1| = \left|1 + \frac{(-1)^n}{2n} - 1\right| = \left|\frac{(-1)^n}{2n}\right| = \frac{1}{2n} \qquad (1)$$

نامساوی $|X_n - 1| < \frac{1}{10^3}$ وقتی برقرار است که $\frac{1}{2n} < \frac{1}{10^3}$ یا $n > \frac{1}{2} \times 10^3 = 500$.

بنابراین ، با انتخاب $m = 500$ در می یابیم که به ازای هر $n \geq m$ ، $|X_n - 1| < \frac{1}{10^3}$.

حل ب:

مجددا به استناد (۱) ، نامساوی $|X_n - 1| < \varepsilon$ وقتی برقرار است که $\frac{1}{2n} < \varepsilon$ یا $m > \frac{1}{2\varepsilon}$.

بنابراین هر قدر که ε کوچک باشد می‌توانیم عددطبیعی m را طوری انتخاب کنیم که $m > \frac{1}{2\varepsilon}$.

مثال ۵) نشان دهید که دنباله $\{(-1)^n\}$ همگرا نیست.

حل:

در این مثال $X_n = (-1)^n$. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ می گیریم و فرض می کنیم p عدد طبیعی

دلخواهی باشد. آن گاه، $2p > p$ و در نتیجه $(2p+1) > p$

و $|X_{2p} - X_{2p+1}| = |(-1)^{2p} - (-1)^{2p+1}| = |1-(-1)| = |2| = 2 > \varepsilon$

بنابـراین ، بـه ازای $\varepsilon = \frac{1}{2}$ و عـدد طبیعی دلخواه p ، اعداد طبیعی $2p$ و $2p+1$ را پیدا کـردیم کـه از p بزرگترنـد و $|X_{2p} - X_{2p+1}| > \varepsilon$. این نشـان می دهد که $\{(-1)^n\}$ همگرا نیست.

۱.۱: بخش دهم

قضیه : هر دنباله همگرا کراندار است، ولی عکس این حکم برقرار نیست.

برهان: فـرض می کنیم دنبـالـه $\{X_n\}$ همگـرا بـه L باشـد. بنابـراین به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک عـددطبیعی مانند m موجود است به طوری که به ازای هر $n \geq m$ ، $|X_n - L| < \varepsilon$.

از این رو ،

به ازای هر $n \geq m$ ، $-\varepsilon < X_n - L < \varepsilon$

اگر عدد L را به طرفین نامساوی بیفزائیم، خواهیم داشت :

به ازای هر $n \geq m$ ، $L - \varepsilon < X_n < L + \varepsilon$

اگر فرض کنیم :

$K = \max\{L+\varepsilon, X_1, X_2, \dots, X_{m-1}\}$ ، $R = \min\{L-\varepsilon, X_1, X_2, \dots, X_{m-1}\}$

آن گاه ، به ازای هر n ، $R < X_n < K$

و نتیجه می گیریم که $\{X_n\}$ کراندار است. عکس حکم بالا برقرار نیست به این معنی که هـر دنبالـهٔ کراندار الزاما همگرا نیست. به عنوان مثال ، دنباله $X_n = (-1)^n$ را در نظر می گیریم واضح است کـه این دنبـالـه کرانـدار است، زیرا بزرگترین کران پایین آن -1 و کوچکترین کران بالای آن 1 می‌باشد. اما قبلا دیدیم که این دنباله همگرا نمی باشد.

تبصـــره :حکم فوق یک شرط لازم برای همگرایی است و می تواند به عنوان یک آزمون در اثبات عدم همگرایی یک دنباله به کار گرفته شود.

***نتیجه: اگر یک دنباله کراندار نباشد نمی تواند همگرا باشد.**

زیرا مثلا فرض می کنیم که $\{X_n\}$ کراندار نباشد. اگر این دنباله همگرا باشد، باید کراندار باشد که بـا فرض متناقض است مثلا، چون دنباله‌های $\{n\}$ و $\{-n\}$ و $\{n^2\}$ همگی بی کرانند، همگرا نتوانند بود.

۱۱۰۱: بخش یازدهم

دنباله‌های واگرا:

تعریف : دنبالـه $\{X_n\}$ را واگرا به ∞ نامیم اگر به ازای هر عدد حقیقی $K > 0$ (به قـدر دلخواه بزرگ) یک عدد صحیح مثبت مانند m موجود باشد (وابسته به k) به طوری که به ازای هر $n \geq m$ ، $X_n > K$

در این صورت می نویسیم: $\lim\limits_{n \to \infty} X_n = \infty$

یا $X_n \to \infty$ وقتی $n \to \infty$

تعریف : دنبالـه $\{X_n\}$ را واگرا به $-\infty$ نامیم اگر به ازای هر عدد حقیقی $K < 0$ یک عدد صحیح مثبت مانند m موجود باشد (وابسته به k) به طوری که به ازای هر $n \geq m$ ، $X_n < K$

در این صورت می نویسیم: $\lim\limits_{n \to \infty} X_n = -\infty$

یا $X_n \to -\infty$ وقتی $n \to \infty$

توضیحات:

۱- دنباله های $\{n\}$ و $\{n^2\}$ واگرا به ∞ می باشند.

مثلا فرض کنید $X_n = n^2$

فرض کنید k یک عدد حقیقی مثبت (به قدر دلخواه بزرگ) باشد. عدد صحیح مثبت m را طوری انتخاب می کنیم که $m > \sqrt{K}$ ،

آن گاه، به ازای هر $n \geq m$ ، $n^2 > k$ ، بنابراین به ازای هر $n \geq m$ ، $X_n > k$ که نشان می دهد که $X_n \to \infty$ وقتی $n \to \infty$

۲- دنباله های $\{-n\}$ و $\{-n^2\}$ به $-\infty$ واگرا می باشند.

تبصره :اگر دنباله واگرا به ∞ باشد، از بالا کراندار نیست اما از پایین کراندار است. همین طور، اگر دنباله واگرا به $-\infty$ باشد، از پایین کراندار نیست ، اما از بالا کراندار است، بنابراین، دنباله های واگرا به ∞ یا $-\infty$ کراندار نیستند.

عکس این احکام نادرست است. فرض کنیم $\{X_n\}$ یک دنباله با شرایط زیر باشد.

$X_n = n$ اگر n زوج باشد ،

$= \frac{1}{n}$ اگر n فرد باشد ،

این دنباله از پایین به صفر کراندار است و از بالا کراندار نیست و، در عین حال واگرا به ∞ نیست.

۱۲۰۱: بخش دوازدهم

دنباله های نوسانی

تعریف : دنباله $\{X_n\}$ را نوسانی خوانند در صورتی که نه همگرا باشد ، نه واگرا به ∞ و نه واگرا به $-\infty$

تعریف :دنباله $\{X_n\}$ را نوسانی متناهی خوانند اگرنوسانی و کراندار باشد.

تعریف : دنباله $\{X_n\}$ را نوسانی نامتناهی خوانند اگرنوسانی باشد ولی کراندار نباشد.

توضیح :

(۱) :دنباله $\{(-1)^n\}$ نوسانی متناهی است.

(۲) : دنباله $\{(-1)^n n\}$ نوسانی نامتناهی است.

۱۳۰۱: بخش سیزدهم

رفتار دنباله یکنوا

قضیه: الف: اگر دنباله صعودی $\{X_n\}$ از بالا کراندار باشد به کوچکترین کران بالای خود همگراست.

ب: اگر دنباله صعودی $\{X_n\}$ از بالا کراندار نباشد واگرا به ∞ است.

برهان الف:

فرض می کنیم که u کوچکترین کران بالای دنباله $\{X_n\}$ باشد. آن گاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند m موجود است به طوری که:

$$u - \varepsilon < X_m \qquad (۱)$$

(به بخش ٤ مراجعه شود) همچنین، چون دنباله مفروض صعودی است، داریم:

$$X_n \geq X_m \quad ، n \geq m \quad \text{به ازای هر} \qquad (۲)$$

پس به استناد (۱) و (۲)، داریم:

$$u - \varepsilon < X_n \quad ، n \geq m \quad \text{به ازای هر}$$

و همچنین به ازای هر n، $X_n < u + \varepsilon$ ($u + \varepsilon$ یک کران بالا برای دنباله $\{X_n\}$ است، زیرا که u کوچکترین کران بالای دنباله است.) بالاخص، به ازای هر $n \geq m$، $X_n < u + \varepsilon$ از این رو به ازای هر $n \geq m$، $u - \varepsilon < X_n < u + \varepsilon$، و نتیجه می گیریم که $\lim_{n \to \infty} X_n = u$ و برهان تمام است.

برهان ب:

چون $\{X_n\}$ از بالا کراندار نیست، به ازای هر $K > 0$ یک عدد صحیح مثبت m وجود دارد به طوری که:

$$X_m > k \qquad (۳)$$

اما $\{X_n\}$ صعودی است و بنابراین،

$X_n \geq X_m$ ، به ازای هر $n \geq m$ (٤)

در نتیجه از (۳) و (٤) داریم :

به ازای هر $n \geq m$ ، $X_n - X_m > k$ که نشان می دهد که $\lim_{n \to \infty} X_n = \infty$

توجه : بنابراین ، هر دنباله صعودی که همگرا نباشد، واگرا به ∞ است.

۱٤۰۱: بخش چهاردهم

قضیه : الف :اگر دنباله نزولی $\{X_n\}$ از پایین کراندار باشد به بزرگترین کران پایین خود همگراست.

ب :اگر دنباله نزولی $\{X_n\}$ از پایین کراندار نباشد واگرا به $-\infty$ است.

برهان الف:

اگر فرض کنیم که L بزرگترین کران پایین دنباله $\{X_n\}$ باشد، با توجه به تعریف بزرگترین کران پایین، به ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض یک عدد صحیح مثبت مانند m موجود است به طوری که :

$$X_m < L + \varepsilon \qquad (۱)$$

(به بخش ٤ مراجعه نمایید)

اما چون دنباله $\{X_n\}$ نزولی است،

$$X_n \leq X_m \quad \text{، به ازای } n \geq m \qquad (۲)$$

بنابراین باتوجه به (۱) و (۲) به ازای هر $n \geq m$ $X_n < L + \varepsilon$ از طرف دیگر ، چون $L - \varepsilon$ یک کران پایین برای دنباله $\{X_n\}$ محسوب می شود، به ازای هر n ، $X_n > L - \varepsilon$.

از این رو به ازای هر $n \geq m$ ، $L - \varepsilon < X_n < L + \varepsilon$

یا به ازای هر $n \geq m$ ، $|X_n - L| < \varepsilon$

و نتیجه می گیریم که : $\lim_{n \to \infty} X_n = L$

برهان ب :

چون $\{X_n\}$ از پایین کراندار نیست ، به ازای هر $K<0$ یک عدد صحیح مثبت مانند m موجود است به طوری که

$$X_m < K \qquad (۳)$$

اما چون $\{X_n\}$ نزولی است ، داریم :

$$X_n \leq X_m \qquad \text{به ازای هر } n \geq m \text{ ،} \qquad (٤)$$

از (۳) و (٤) نتیجه می شود که به ازای هر $n \geq m$ ، $X_n < K$ بنابر این $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = -\infty$

توجه : هر دنباله نزولی واگرا به $-\infty$ است در صورتی که همگرا نباشد.

۱۵.۱: بخش پانزدهم

قضیه: هر دنباله یکنوا فقط و فقط وقتی همگراست که کراندار باشد.

برهان:

لزوم شرط: اگر $\{X_n\}$ یکنوا و همگرا باشد به استناد قضیه ۱۰.۱ کراندار است .

کفایت شرط : فرض می کنیم $\{X_n\}$ یکنوا و کراندار باشد آنگاه اگر $\{X_n\}$ صعودی باشد ،چون کراندار است ،پس از بالا کراندار است و در نتیجه به استناد قضیه ۱۳.۱ همگرا است . اگر $\{X_n\}$ نزولی باشد ، چون کراندار است پس از پایین کراندار است در نتیجه به استناد قضیه ۱۳.۱ همگراست .

توجه : به طور کلی یک دنباله دلخواه می تواند همگرا، واگرا یا نوسانی باشد ولی یک دنباله یکنوا یا همگراست یا واگرا .

مثال ۱ : نشان دهید که دنباله $\left\{\dfrac{۲n-۷}{۳n+۲}\right\}$ دارای خواص زیر است

الف) صعودی است ب) کراندار است ج) همگراست

حل:

الف)

$$X_n = \frac{۲n-۷}{۳n+۲}$$

$$X_{n+۱} = \frac{۲(n+۱)-۷}{۳(n+۱)+۲} = \frac{۲n-۵}{۳n+۵}$$

به ازای هر n ،

$$X_{n+۱} - X_n = \frac{۲n-۵}{۳n+۵} - \frac{۲n-۷}{۳n+۲} = \frac{۲۵}{(۳n+۵)(۳n+۲)} > ۰$$

$X_{n+۱} > X_n$ به ازای هر n

ب)

به ازای هر n ،

$$X_n = \frac{۲n-۷}{۳n+۲} = \frac{۲}{۳} - \frac{\frac{۲۵}{۳}}{۳n+۲} < \frac{۲}{۳}$$

بنابر این $\{X_n\}$ از بالا کراندار است. از طرف دیگر به ازای هر $n \geq ٤$ ،

$$X_n = \frac{۲n-۷}{۳n+۲} > ۰$$

همچنین $X_۱ = \frac{-۵}{۵} = -۱$ و $X_۲ = \frac{-۳}{۸}$ و $X_۳ = \frac{-۱}{۱۱}$. از این رو به ازای هر n ، $X_n \geq -۱$ ونتیجه می گیریم که $\{X_n\}$ از پایین نیز کراندار است.

ج) حال چون $\{X_n\}$ صعودی است (بنا به الف) و از بالا نیز کراندار است (بنا به ب) پس همگراست.

مثال۲) نشان دهید که دنباله $\{X_n\}$ با ، $X_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{٤} + \dots + \frac{۱}{n}$ واگراست.

حل:

با تبدیل n به (n+۱) در X_n داریم:

$$X_{n+۱} = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{٤} + \dots + \frac{۱}{n+۱}$$

به ازای هر n ،

$$X_{n+1} - X_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} > 0$$

در نتیجه $\{X_n\}$ صعودی است.

$$X_{2n} - X_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} \qquad (n \text{ جمله})$$

$$= \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

به ازای هر n ، $|X_{2n} - X_n| > \frac{1}{2}$

حال اگر $\varepsilon = \frac{1}{2}$ بگیریم ملاحظه می کنیم که به ازای هر n ، $|X_{2n} - X_n| > \varepsilon$

بنابر این ، باتوجه به تبصره ۱ بخش ۹ ، دنباله $\{X_n\}$ همگرا نمی باشد. چون $\{X_n\}$ صعودی است ولی همگرا نیست ، واگرا به ∞ است . (به بخش ۱۳ مراجعه کنید)

مثال۳) نشان دهید $\{X_n\}$، با $X_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$ کراندار نمی باشد.

حل :

حل این مساله شکل دیگر مثال ۲ است .

اگـر $\{X_n\}$ کرانـدار باشـد، از بالا کراندار است. چون صعودی است، لازم می آید که همگرا باشد که با نتیجه مثال ۲ متناقض است.

مثال ٤) ثابت کنید که دنباله $\{X_n\}$ در هر یک از حالتهای زیر همگرا است.

الف) $$X_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

ب) $$X_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

حل الف:

$$X_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

با تبدیل n به $(n+1)$ داریم:

$$X_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2}$$

$$X_{n+1} - X_n = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right)$$

$$- \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{2}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = 0$$

به ازای هر n، $X_{n+1} > X_n$

نتیجه می گیریم که

(۱) دنباله $\{X_n\}$ صعودی است.

همچنین :

$$X_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$\leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1} < 1$$

از این رو به ازای هر n ، $X_n \leq 1$ لذا ،

(۲) دنباله $\{X_n\}$ از بالا کراندار است .

از (۱)و(۲) نتیجه می گیریم که $\{X_n\}$ همگرا است (به بخش ۱۳ مراجعه کنید).

حل ب :

$$X_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

با تبدیل n به $n+1$ داریم:

$$X_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$$

$$X_{n+1} - X_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n(2n+1)} < 0$$

به ازای هر n ، $X_{n+1} < X_n$

(۱) بنابراین دنباله $\{X_n\}$ نزولی است .

همچنین :

$$X_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

$$\geq \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \qquad (n \text{ جمله})$$

به ازای هر n ،

$$= \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2n-1)} > \frac{1}{2}$$

از این رو

(۲) دنباله $\{X_n\}$ از پایین کراندار است.

از (۱) و (۲) نتیجه می شود که $\{X_n\}$ همگرا است (بخش ۱۴).

مثال ۵) نشان دهید که دنباله $\{a_n\}$ با رابطه زیر همگراست.

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

حل:

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

با تبدیل n به $n+1$ داریم:

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$a_{n+1} - a_n = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

از اینرو به ازای هر n ، $a_{n+1} > a_n$ و نتیجه می گیریم.

(۱) $\{a_n\}$ صعودی است.

همچنین

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$< 1 + \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \text{(جمله } n)\right]$$

[زیرا: $\frac{۱}{۳!} < \frac{۱}{۲^۲}$ ، ... ، $۳! = ۱ \times ۲ \times ۳ > ۲ \times ۲$]

$$a_n < ۱ + \frac{۱(۱ - \frac{۱}{۲^n})}{۱ - \frac{۱}{۲}}$$

[زیرا جمل داخل کروشه جمل یک تصاعد هندسی است با جمله اول ۱ و قدرنسبت $\frac{۱}{۲}$]

به ازای هر n ، $a_n < ۱ + ۲(۱ - \frac{۱}{۲^n}) = ۱ + ۲ - \frac{۱}{۲^{n-۱}} < ۱ + ۲ = ۳$

بنابراین

(۲) $\{a_n\}$ از بالا کراندار است.

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که $\{a_n\}$ همگرا است. (هر دنباله صعودی که از بالا کراندار باشد همگراست).

توجه:

$$a_n = ۱ + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \cdots + \frac{۱}{n!}$$

$$> ۱ + \frac{۱}{۱!}$$

به ازای هر n ، $a_n > ۲$

از این رو به استناد قضیه بالا ، به ازای هر n ، $۲ < a_n < ۳$

این ایجاب می کند که $۲ < \lim_{n \to \infty} a_n < ۳$

[به طور کلی ، هر دنباله یکنوای کراندار به کوچکترین کران بالا یا بزرگترین کران پایین خود همگراست.]

مثال ٦) نشان دهید که دنباله $\{S_n\}$ با $S_n = (۱ + \frac{۱}{n})^n$ همگراست و حد آن بین ۲ و ۳ قرار دارد.

حل:

$$S_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(2)(1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+$$

$$\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

با تبدیل n به $n+1$ در S_n داریم:

$$S_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

اما چون نامساوی $1-\frac{k}{n}<1-\frac{k}{n+1}$ به ازای $k=1,2,\cdots,n$ برقرار است، داریم.

به ازای هر n، $S_n<S_{n+1}$

بنابر این، $\{S_n\}$ صعودی است.

همچنین:

$$S_n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+$$

$$\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$<1+1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

[زیرا $1 - \frac{k}{n} < 1 \quad k = 1, 2, 3, \dots, n-1$]

$$= 1 + \left(1 + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\times 3} + \cdots \text{ جمله } n\right)$$

$$< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\times 2} + \cdots \text{ جمله } n\right)$$

$$= 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \text{ جمله } n\right) = 1 + \frac{1\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= 1 + 2\left[1 - \frac{1}{2^n}\right] = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

از این رو به استناد نتیجه بالا ،

به ازای هر n ، $2 < S_n < 3$

این نامساوی ها مستلزم ، $2 < \lim\limits_{n\to\infty} S_n < 3$ است .بنابر این ، $2 < e < 3$.

مثال ۷) در مورد همگرایی دنباله زیر بحث کنید .

الف) $X_n = \frac{n+1}{n}$ ج) $X_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$

ب) $X_n = \frac{n}{n^2+1}$ د) $X_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}$

حل الف :

$$X_n = \frac{n+1}{n}$$

با تبدیل n به $n+1$ داریم:

$$X_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

$$X_{n+1} - X_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{n(n+1)}$$

به ازای هر n ، $= \frac{-1}{n(n+1)} < 0$

پس به ازای هر n ، $X_{n+1} < X_n$

یعنی $\{X_n\}$ اکیدا نزولی است

همچنین به ازای هر n ، $X_n = \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > 1$

بنابر این $\{X_n\}$ از پایین به یک کراندار است

چون ۱ بزرگترین کران پایین دنباله، نزولی $\{X_n\}$ است، این دنباله به ۱ همگراست .

حل ب :

$$X_n = \frac{n}{n^2+1}$$

$$X_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} = \frac{n+1}{n^2+2n+2}$$

$$X_{n+1} - X_n = \frac{n+1}{n^2+2n+2} - \frac{n}{n^2+1}$$

$$= \frac{(n+1)(n^2+1) - n(n^2+2n+2)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$$

به ازای هر n ، $= \frac{-n^2-n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} < 0$

به ازای هر n ، $X_{n+1} < X_n$

بنابـر این $\{X_n\}$ اکیـدا نزولی است .در این مثال۰ بزرگترین کران پایین دنباله $\{X_n\}$ است .چون این دنباله نزولی است ، به۰ همگراست .

حل ج :

$$X_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

$$X_{n+1}-X_n=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

$$-\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)$$

به ازای هر n ، $= \frac{1}{3^{n+1}} > 0$

به ازای هر n ، $X_{n+1} > X_n$

بنابراین ، $\{X_n\}$ اکیدا صعودی است.

همچنین $X_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}$

[(مجموع $n+1$ جمله از یک تصاعد هندسی با جمله اول ۱ و قدر نسبت $\frac{1}{2}$)]

$$=\frac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{3^{n+1}}\right]$$

$$<\frac{3}{2}$$

بنابراین ، $\{X_n\}$ از بالا کراندار است.

چون این دنباله اکیدا صعودی و از بالا کراندار است به کوچکترین کران بالای خود، یعنی $\frac{3}{2}$ ، همگرا است .

حل د :

$$X_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}$$

$$X_{n+1}-X_n = \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+2)^2}\right] - \left[\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+2)^2} - \frac{1}{n^2}$$

$$< \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{2}{(2n+1)^2} - \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{-2n^2+4n+1}{(4n^2+1+4n)n^2} < 0$$

به ازای هر n ، $X_{n+1} < X_n$

یعنی $\{X_n\}$ نزولی است.

همچنین: به ازای هر n ، $X_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} > 0$

از این رو، $\{X_n\}$ از پایین به صفر کراندار است.

بنابراین، $\{X_n\}$ همگراست.

مثال ۸ : در مورد همگرایی دنباله های زیر بحث کنید.

الف) $X_n = \frac{n^2+1}{2n+3}$

ب) $X_n = \alpha^n$ ، $\alpha > 1$

ج) $X_n = -\alpha^n$ ، $\alpha > 1$

د) $X_n = n - n^2$

حل الف)

با تبدیل n به n+۱ داریم:

$$X_{n+1}=\frac{(n+1)^2+1}{2(n+1)+3}=\frac{n^2+2n+2}{2n+5}$$

$$X_{n+1}-X_n=\frac{n^2+2n+2}{2n+5}-\frac{n^2+1}{2n+3}$$

$$=\frac{2n^2+8n+1}{(2n+3)(2n+5)}>0$$ به ازای هر n ،

$X_{n+1}>X_n$ به ازای هر n ،

بنابر این $\{X_n\}$ صعودی است

چون $\{X_n\}$ از بالا کراندار نیست (به مثال ۲ از بخش ۵ مراجعه کنید)، واگرا به ∞ است (با توجه به بخش ۱۳).

حل ب)

$$X_{n+1}=\alpha^{n+1}$$

$\alpha>1$ نتیجه می دهد: $\alpha^{n+1}>\alpha^n$ از این رو :

$X_{n+1}>X_n$ به ازای هر n ،

بنابر این $\{X_n\}$ صعودی است.

چون $\{X_n\}$ از بالا کراندار نیست (به مثال ۲ از بخش ۵ مراجعه کنید)، واگرا به ∞ است.

حل ج)

$$X_n=-\alpha^n \qquad (\alpha>1)$$

این مثال را به استناد مثال ۲ بخش ۵ با تغییرات به صورت زیر حل می کنیم .

چون دنباله $\{\alpha^n\}$ صعودی است ، دنباله $\{-\alpha^n\}$ نزولی است.

چون دنباله $\{\alpha^n\}$ از بالا کراندار نیست ، دنباله $\{-\alpha^n\}$ از پایین کراندار نیست.

این نتایج نشان می دهد که $\{-\alpha^n\}$ به $-\infty$ واگراست.

حل د)

$$X_n = n - n^2$$

$$X_{n+1} = (n+1) - (n+1)^2 = -n^2 - n$$

$$X_{n+1} - X_n = -n^2 - n - n + n^2 = -2n < 0$$ به ازای هر n ،

$$X_{n+1} < X_n$$ به ازای هر n ،

بنابر این $\{X_n\}$ نزولی است

چون $\{X_n\}$ از پایین کراندار نیست، واگرا به $-\infty$ است (با توجه به بخش ۱۴).

مثال ۹) نشان دهید که دنبالهٔ $\{(1+\frac{3}{n})^n\}$ صعودی و کراندار است.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n})^n = e^3$$

حل:

$$X_n = (1+\frac{3}{n})^n = 1 + n\cdot\frac{3}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}(\frac{3}{n})^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))}{n!}(\frac{3}{n})^n$$

$$X_n = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{3^3}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots + \frac{3^n}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

با تبدیل n به $(n+1)$ داریم:

$$X_{n+1} = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \frac{3^3}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1}) + \cdots + \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})$$

چون ، $k=1,2,3,n$ ، $1-\frac{k}{n+1}>1-\frac{k}{n}$

درمی یابیم که ،به ازای هر n ، $X_{n+1}>X_n$.از این رو ،

(۱) $\{X_n\}$ صعودی است. همچنین :

$$X_n=1+3+\frac{3^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{3^3}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+$$

$$\frac{3^n}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$X_n<1+3+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\dots+\frac{3^n}{n!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{k!}=e^3$$

از اینرو به ازای هر n ، $X_n<e^3$. لذا :

(۲) $\{X_n\}$ از بالا کراندار است .

از (۱) و (۲) نتیجه می شود که دنباله $\{X_n\}$ به کوچکترین کران بالای خود که e^3 است ، همگرا می باشد و برهان تمام است.

۱۶۰۱: بخش شانزدهم

دنباله پوچ

تعریف:دنباله $\{X_n\}$ را پوچ نامند اگر این دنباله به صفر همگرا باشد ،یعنی $\lim_{n\to\infty} X_n=0$

۱۷۰۱: بخش هفدهم

قضیه : دنباله $\{X_n\}$ پوچ است اگر و فقط اگر دنباله $\{|X_n|\}$ پوچ باشد .به عبارت دیگر ،

$\lim_{n\to\infty} X_n=0$ اگر و فقط اگر $\lim_{n\to\infty}|X_n|=0$

برهان لزوم:

فرض می کنیم $\{X_n\}$ پوچ است ، یعنی $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$

بنابر این ،به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد صحیح مثبت مانند m وجود دارد به طوری که

به ازای هر $n \geq m$ ، $|X_n| < \varepsilon$

حال باید نشان دهیم که دنباله $\{|X_n|\}$ به صفر همگرا می‌باشد. کافی است ملاحظه کنیم که

به ازای هر $n \geq m$ ، $||X_n| - 0| = ||X_n|| = |X_n| < \varepsilon$

بنابراین : $\lim\limits_{n\to\infty} |X_n| = 0$

برهان کفایت:

فرض می کنیم که $\{|X_n|\}$ یک دنباله پوچ است از اینرو ،به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد صحیح مثبت مانند m موجود است به طوری که : به ازای هر n ، $||X_n| - 0| < \varepsilon$

به ازای هر n ، $||X_n|| < \varepsilon$

به ازای هر n ، $|X_n| < \varepsilon$

به ازای هر n ، $|X_n - 0| < \varepsilon$

و بنابراین : $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$

توضیحات:

۱ – دنباله $\{\frac{1}{n}\}$ پوچ است ، زیرا اگر $n \to \infty$ ، آنگاه: $\frac{1}{n} \to 0$.

۲ – دنباله $\{X_n\}$ با $X_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ نیز پوچ است ، زیرا اگر، $n \to \infty$

$$|X_n| = \frac{1}{n} \to 0$$

مثال : ثابت کنید که دنباله های زیر پوچ هستند .

الف) $(|a| < 1)$، $\{a_n\}$ ج) $(\beta > 0)$ ، $\{\frac{n^\alpha}{e^{n\beta}}\}$

ب) (α دلخواه و $\beta > 0$)، $\{\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta}\}$ د) $(\beta > 1)$ $\{\frac{n^\alpha}{\beta^n}\}$

حل الف)

باید نشان دهیم دنباله $\{a_n\}$ وقتی $|a|<1$ ، به صفر همگراست.

باید ملاحظه کنیم که : $|X_n| = |a^n| = |a|^n$

با تبدیل n به $n+1$ داریم : $|X_{n+1}| = |a|^{n+1}$

چون $|a|<1$ داریم : $|a|^n > |a|^{n+1}$ از این رو ،

به ازای هر n ، $|X_n| > |X_{n+1}|$. لذا $\{|X_n|\}$ نزولی است . همچنین

به ازای هر n ، $|X_n| = |a|^n > 0$ ، بنابراین، $\{|X_n|\}$ از پایین کرانداراست.

نتیجه می گیریم که $\{|X_n|\}$ به بزرگترین کران بالای خود ، که عدد صفر است همگرا است .

بنابراین $\{|X_n|\}$ که همگرا به صفر است یک دنباله پوچ است .

حل ب)

فرض می کنیم β عددی مثبت باشد و $X_n = \dfrac{(\log n)^\alpha}{n^\beta}$.می توان نوشت .

$$X_n = \frac{(\log n)^\alpha}{e^{\beta \log n}} \qquad (1)$$

حال اگر a عدد صحیح مثبتی بزرگتر از α باشدآنگاه ، به استناد بسط ماکلورن ، به ازای $n \geq 2$ داریم :

$$e^{\beta \log n} = 1 + \beta \log n + \frac{1}{2!}(\beta \log n)^2 + \frac{1}{3!}(\beta \log n)^3 + \dots + \frac{1}{a!}(\beta \log n)^a + \dots$$

$$> \frac{1}{a!}(\beta \log n)^a$$

که‌از آن نتیجه می شود:

$$\frac{1}{e^{\beta \log n}} < \frac{a!}{(\beta \log n)^a}$$

از (۱) و این نامساوی لازم می آید که :

$$0 < X_n < \frac{a!}{\beta^\alpha (\log n)^{a-\alpha}}$$

چون $\frac{1}{\log n} \to 0$ وقتی $n \to \infty$ ، قضیه افشردگی ایجاب می کند که

$$\lim_{n\to\infty} X_n = 0$$

توجه: اگر $\alpha < 0$ دنباله به ازای $n \geq 2$ تعریف می شود.

حل ج)

$$X_n = \frac{n^\alpha}{e^{n\beta}} \quad \text{و} \quad \beta > 0$$

مطابق راه حل مساله ۲ عمل و از بسط ماکلورن $e^{n\beta}$ استفاده کنید.

حل د)

$$X_n = \frac{n^\alpha}{\beta^n} \quad \text{و} \quad \beta > 1$$

داریم:

$$\frac{n^\alpha}{\beta^n} = \frac{n^\alpha}{e^{n\log\beta}}$$

فرض کنید :

$$\log\beta = \gamma$$

فرض $\beta > 1$ ایجاب می کند که $\gamma > 0$، آن گاه $\frac{n^\alpha}{\beta^n} = \frac{n^\alpha}{e^{\gamma n}}$ که به مساله «ج» منتهی می شود.

نتیجه: اگر $\alpha = 1$ و $\beta > 1$ ، آنگاه $\frac{n}{\beta^n} \to 0$ وقتی $n \to \infty$

۱۸۰۱: بخش هیجدهم

جبر حدود دنباله‌ها

قضیه : اگر $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ دو دنباله مفروض و $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ و $\lim_{n\to\infty} Y_n = Y$ باشد، آن گاه:

۱: $\lim_{n\to\infty} |X_n| = |X|$

۲: $\lim_{n\to\infty} (X_n + Y_n) = X + Y$

۳: $\lim_{n\to\infty}(X_n - Y_n) = X - Y$

٤: $\lim_{n\to\infty}(X_n Y_n) = XY$

۵: $\lim_{n\to\infty}(kX_n) = kX$

که در آن k یک ثابت دلخواه است.

حل ۱):

چون $X_n \to X$ ، به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد صحیح مثبت مانند m موجود است به طوری که

به ازای هر $n \geq m$ ، $|X_n - X| < \varepsilon$

آنگاه $\big||X_n| - |X|\big| < |X_n - X|$

به ازای هر $n \geq m$ ، $< \varepsilon$

ونتیجه می گیریم که: $\lim_{n\to\infty}|X_n| = |X|$

حل ۲):

فرض می کنیم $\varepsilon > 0$ مفروض باشد چون $X_n \to X$ و $Y_n \to Y$ ، اعداد صحیح مثبت m_1 و m_2 موجودند به طوری که:

به ازای هر $n \geq m_1$ ، $|X_n - X| < \frac{\varepsilon}{2}$

به ازای هر $n \geq m_2$ ، $|Y_n - Y| < \frac{\varepsilon}{2}$

اگر فرض کنیم $m = \max\{m_1 \text{ و } m_2\}$ آنگاه:

به ازای هر $n \geq m$ ، $|X_n - X| < \frac{\varepsilon}{2}$

به ازای هر $n \geq m$ ، $|Y_n - Y| < \frac{\varepsilon}{2}$

و نتیجه می گیریم که:

$$|(X_n+Y_n)-(X+Y)| \leq |X_n-X|+|Y_n-Y|$$

به ازای هر $n \geq m$ ،
$$< \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon$$

که نشان می دهد که
$$\lim_{n\to\infty}(X_n+Y_n) = X+Y$$

حل ۳):

فرض می کنیم $\varepsilon > ۰$ مفروض باشد چون $X_n \to X$ و $Y_n \to Y$ ، اعداد مثبت $m_۱$ و $m_۲$ موجودند به طوری که:

به ازای هر $n \geq m_۱$ ،
$$|X_n-X| < \frac{\varepsilon}{۲}$$

به ازای هر $n \geq m_۲$ ،
$$|Y_n-Y| < \frac{\varepsilon}{۲}$$

اگر فرض کنیم $m = \max\{m_۱ \text{ و } m_۲\}$ آنگاه:

به ازای هر $n \geq m$ ،
$$|X_n-X| < \frac{\varepsilon}{۲}$$

به ازای هر $n \geq m$ ،
$$|Y_n-Y| < \frac{\varepsilon}{۲}$$

و نتیجه می گیریم که:

$$|(X_n-Y_n)-(X-Y)| = |X_n-X|-|Y_n-Y|$$
$$< |X_n-X|+|Y_n-Y|$$

به ازای هر $n \geq m$ ،
$$< \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon$$

که نشان می دهد که
$$\lim_{n\to\infty}(X_n-Y_n) = X-Y$$

حل ۴):

چون $\{X_n\}$ همگراست ، کراندار است ، بنابر این عدد صحیح مثبت مانند M

موجوداست به طوری که:

(۱) $|X_n| < M$ به ازای هر n ،

فرض می کنیم ۴۵ مفروض باشد چون $X_n \to X$ و $Y_n \to Y$ ، اعداد صحیح مثبت m_1 و m_2 موجودند به طوری که

(۲) $|X_n - X| < \frac{\varepsilon}{2|Y|}$ به ازای هر $n \geq m_1$ ،

(۳) $|Y_n - Y| < \frac{\varepsilon}{2M}$ به ازای هر $n \geq m_2$ ،

اگر فرض کنیم که $m = \max\{m_1 \text{ و } m_2\}$ آنگاه (۲) و (۳) به ازای هر $n \geq m$ برقرار هستند.

از این رو

$$\begin{aligned}
|X_nY_n - XY| &= |X_nY_n - X_nY + X_nY - XY| \\
&= |X_n(Y_n - Y) + Y(X_n - X)| \\
&\leq |X_n(Y_n - Y)| + |Y(X_n - X)| \\
&= |X_n||Y_n - Y| + |Y||X_n - X| \\
&< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |Y| \cdot \frac{\varepsilon}{2|Y|} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{به ازای هر } n \geq m \text{ ،}
\end{aligned}$$

در نتیجه: $\lim_{n \to \infty} (X_nY_n) = XY$

حل ۵):

چون $\{X_n\}$ به X همگراست، به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض، عدد صحیح مثبتی مانند m موجوداست به طوری که: (۱) $|X_n - X| < \frac{\varepsilon}{|k|}$ به ازای هر $n > m$ ،

باید نشان دهیم که $\{kX_n\}$ به kX همگراست. کافی است ملاحظه کنیم که، به استناد (۱)

$$\begin{aligned}
|kX_n - kX| &= |k(X_n - X)| = |k||X_n - X| \\
&< |k| \cdot \frac{\varepsilon}{|k|} \qquad \text{به ازای هر } n \geq m \text{ ،}
\end{aligned}$$

$|kX_n - kX| < \varepsilon$ به ازای هر $n \geq m$ ،

و برهان تمام است .

۱۹۰۱: بخش نوزدهم

قضیه : اگر $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ دو دنباله همگراباشند و $X_n \to X$ و $Y_n \to Y$ ، به ازای $Y_n \neq 0$ و $Y \neq 0$ داریم :

الف : $\frac{1}{Y_n} \to \frac{1}{Y}$

ب : $\frac{X_n}{Y_n} \to \frac{X}{Y}$

برهان الف:

چون $Y \neq 0$ ، فرض $|Y| = 2\delta$ ایجاب می کندکه $\delta > 0$ لذا ، چون $Y_n \to Y$ یک عدد صحیح مثبت مانند m_1 موجود است به طوری که:

(۱) $|Y_n - Y| < \delta$ به ازای هر $n \geq m_1$ ،

از نامساوی

$$|Y_n| = |Y - (Y - Y_n)| \geq \big| |Y| - |Y - Y_n| \big|$$

و(۱) نتیجه می گیریم که

$|Y_n| > |2\delta - \delta| = \delta$ به ازای هر $n \geq m_1$ ،

یا

(۲) $\frac{1}{|Y_n|} < \frac{1}{\delta}$ به ازای هر $n \geq m_1$ ،

فرض می‌کنیم که ε عدد مثبت دلخواهی باشد. چون $Y_n \to Y$ ، یک عدد صحیح مثبتی مانند m_2 موجود است به طوری که:

(۳) $|Y_n - Y| < 2 \cdot \delta^2 \cdot \varepsilon$ به ازای هر $n \geq m_2$ ،

اگر فرض کنیم m_1 و m_2 } $m = \max\{$ آنگاه (۲) و (۳) به ازای هر $n \geq m$ برقرارند و نتیجه می گیریم که :

$$\left| \frac{1}{Y_n} - \frac{1}{Y} \right| = \left| \frac{Y - Y_n}{Y \cdot Y_n} \right| = \frac{|Y - Y_n|}{|Y_n||Y|}$$

$$= \frac{|Y_n - Y|}{|Y_n||Y|} < \frac{2\delta^2 \varepsilon}{\delta \cdot 2\delta} = \varepsilon$$ به ازای هر $n \geq m$ ،

این نشان می دهد که $\left\{ \frac{1}{Y_n} \right\}$ همگرا به $\frac{1}{Y}$ می باشد.

برهان ب:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{X_n}{Y_n} = \lim_{n \to \infty} \left(X_n \cdot \frac{1}{Y_n} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} X_n \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{Y_n}$$

$$= X \cdot \frac{1}{Y} = \frac{X}{Y}$$

تبصره: عکس احکام بالا برقرار نیست. ممکن است دنباله $\{|X_n|\}$ همگرا باشد ولی دنباله $\{X_n\}$ همگرا نباشد.

همچنین امکان دارد

$$\lim_{n \to \infty} (X_n Y_n) \qquad \lim_{n \to \infty} (X_n - Y_n) \qquad \lim_{n \to \infty} (X_n + Y_n)$$

موجود باشند ولی هیچ یک از حدود زیر موجود نباشد :

$$\lim_{n \to \infty} Y_n \quad \text{و} \quad \lim_{n \to \infty} X_n$$

توضیحات:

۱) : $X_n = (-1)^n$ را در نظر می گیریم . می دانیم که $\lim_{n \to \infty} X_n$ موجود نیست. امّا به ازای هر n ، $|X_n| = |(-1)^n| = |-1|^n = 1$

و بنابر این ، $\lim_{n\to\infty}|X_n|=1$

۲): $X_n=n$ و $Y_n=-n$ رادر نظر می‌گیریم.هر دو دنباله واگرا می باشند.امّا:

به ازای هر n ، $X_n+Y_n=n+(-n)=0$

و از این رو : $\lim_{n\to\infty}(X_n+Y_n)\to 0$

۳): فرض می کنیم $Y_n=X_n=(-1)^n$ می دانیم که هیچ یک از دو دنباله به حدی میل نمی کند ، امّا:

به ازای هر n ، $\lim_{n\to\infty}(X_nY_n)=1$

و بنابر این ، بنا به آنچه گفته شد ، نتایج بخشهای ۱۸ و ۱۹ فقط زمانی می توانند بکار گرفته شوند که هر دو حدّ $\lim_{n\to\infty}X_n$ و $\lim_{n\to\infty}Y_n$ موجود باشند.

بنابراین دانشجویان باید قبل از بکار گیری نتایج جبر حدود بخشهای ۱۸ و ۱۹ از وجود این دو حد یقین حاصل نمایند.در غیر این صورت ممکن است اشتباهی نظیر اشتباه مثال زیر مرتکب شوند.

$$\lim_{n\to\infty}[(-1)^n+(-1)^{n+1}]=\lim_{n\to\infty}(-1)^n+\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$$ (بنا به بخش ۱۸)

چون هیچ یک از حدود سمت راست موجود نمی باشند ، نتیجه می گیریم که حد چپ نیز موجود نمی باشد .این نتیجه گیری نادرست است ، زیرا نشان می دهیم که حد سمت چپ موجود و برابر با صفر می باشد .

$$\lim_{n\to\infty}[(-1)^n+(-1)^{n+1}]=\lim_{n\to\infty}[(-1)^n+(-1)(-1)^n]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[(-1)^n-(-1)^n]=\lim_{n\to\infty}[0]=0$$

۲۰۱: بخش بیستم

قضیه: الف) اگر $X_n\to X$ وبه ازای هر n ، $X_n\geq 0$ آنگاه $X>0$

ب) $X_n \to X$ و $Y_n \to Y$ و به ازای هر n ، $X_n \leq Y_n$ آنگاه $X \leq Y$

برهان الف:

می خواهیم ثابت کنیم که $X \geq 0$. فرض می‌کنیم $X < 0$.آنگاه : $\varepsilon = \frac{-X}{2} > 0$.
چون $X_n \to X$ عدد صحیح مثبتی مانند m موجود است به طوری که به ازای هر
به ازای هر $n \geq m$ ، $|X_n - X| < \varepsilon$

یا به ازای هر $n \geq m$ ، $X - \varepsilon < X_n < X + \varepsilon$

اما $\varepsilon = \frac{-X}{2}$ بنابراین به ازای هر $n \geq m$ ، $X_n < X - \frac{X}{2} = \frac{X}{2} < 0$

و این با فرض « به ازای هر n ، $X_n \geq 0$ » متناقض است از این رو ، $X < 0$ باطل است.

برهان ب:

فرض می کنیم $a_n = Y_n - X_n$.نامساوی $X_n \leq Y_n$ که به ازای هر n برقرار است ، ایجاب می کند که :

به ازای هر n ، $a_n \geq 0$

همچنین، از مفروضات $X_n \to X$ و $Y_n \to Y$ نتیجه می شود که $a_n \to Y - X$ از این رو به استناد حکم الف $Y - X \geq 0$ یا $X \leq Y$.

تبصره :حتی اگر همه جمل دنباله مثبت باشند، الزاما حد دنباله مثبت نیست .به عنوان مثال دنباله $\{X_n\}$ را با $X_n = \frac{1}{n}$ در نظر می گیریم.در این جا به ازای هر n ، $X_n > 0$. ولی $X_n = \frac{1}{n} \to 0$

۲۱۰۱: بخش بیست و یکم

قضیه افشردگی در حد:

اگر $X_n \to L$ و $Y_n \to L$ و اگر به ازای همه مقادیر n ، $X_n \leq U_n \leq Y_n$ ،آنگاه:
$U_n \to L$

اثبات:

$\varepsilon > 0$ را مفروض می گیریم چون ، $X_n \to L$ و $Y_n \to L$ ، اعداد صحیح مثبتی

مانند m_1 و m_2 موجودند به طوری که :

به ازای هر $n \geq m_1$ ، $L-\varepsilon < X_n < L+\varepsilon$ یا به ازای هر $n \geq m_1$ ، $|X_n - L| < \varepsilon$

به ازای هر $n \geq m_2$ ، $L-\varepsilon < Y_n < L+\varepsilon$ یا به ازای هر $n \geq m_2$ ، $|Y_n - L| < \varepsilon$

فرض می کنیم $m = \max\{m_1 \text{ و } m_2\}$ داریم :

به ازای هر $n \geq m$ ، $L-\varepsilon < X_n < L+\varepsilon$

به ازای هر $n \geq m$ ، $L-\varepsilon < Y_n < L+\varepsilon$

همچنین بنا به فرض داریم:

به ازای هر n ، $X_n < U_n < Y_n$

بنابر این ،

به ازای هر $n \geq m$ ، $L-\varepsilon < X_n < U_n < Y_n < L+\varepsilon$

یا به ازای هر $n \geq m$ ، $L-\varepsilon < U_n < L+\varepsilon$

یا به ازای هر $n \geq m$ ، $|U_n - L| < \varepsilon$

که از آن نتیجه می گیریم که : $U_n \to L$

۲۲۰۱: بخش بیست و دوم

قضیه: فرض کنید دنباله $\{X_n\}$ چنان باشد که $\frac{X_{n+1}}{X_n} \to L$. اگر $|L| < 1$ آن گاه $X_n \to 0$

برهان:

چون $|L| < 1$ ، بنابر این داریم ، $1 - |L| > 0$ حال ε را طوری انتخاب می کنیم که :

$$\varepsilon < 1 - |L| \qquad (1)$$

چون $\frac{X_{n+1}}{X_n} \to L$ ،عدد صحیح مثبتی مانند M موجود است به طوری که :

به ازای هر $n \geq m$ ، $\left|\frac{X_{n+1}}{X_n} - L\right| < \varepsilon$

بنابراین :

به ازای هر $n \geq m$ $\quad \left| \frac{X_{n+1}}{X_n} \right| - |L| \leq \left| \frac{X_{n+1}}{X_n} - L \right| < \varepsilon$

یا به ازای هر $n \geq m$ ، $\left| \frac{X_{n+1}}{X_n} \right| < |L| + \varepsilon$

یا به ازای هر $n \geq m$ ، $|X_{n+1}| < |X_n| \, (|L| + \varepsilon)$

از اینرو به ازای $n = m, m+1, \ldots, (p+1), p$ ، داریم :

$$|X_{m+1}| < |X_m| \, (|L| + \varepsilon)$$
$$|X_{m+2}| < |X_{m+1}| \, (|L| + \varepsilon)$$

$$|X_p| < |X_{p-1}| \, (|L| + \varepsilon)$$
$$|X_{p+1}| < |X_p| \, (|L| + \varepsilon)$$

از ضرب نامساوی ها و حذف $|X_{m+1}| \, |X_{m+2}| \cdots |X_p|$ از دو طرف داریم :

$$|X_{p+1}| < (|L| + \varepsilon)^{p+1-m} \, |X_m|$$

$$= \frac{|X_m|}{(|L| + \varepsilon)^m} \cdot (|L| + \varepsilon)^{p+1} = A(|L| + \varepsilon)^{p+1} \qquad (۲)$$

که در آن $A = \frac{|X_m|}{(|L| + \varepsilon)^m}$ مقدار ثابتی است.

امّا به استناد (۱)، $|L| + \varepsilon < 1$. لذا: $(|L| + \varepsilon)^{p+1} \to 0$ وقتی $P \to \infty$.

پس بنا به (۲) $|X_{p+1}| \to 0$ وقتی $P \to \infty$ یا $\lim_{n \to \infty} X_n = 0$

۲۳۰۱: بخش بیست و سوم

قضیه: اگر دنباله $\{X_n\}$ چنان باشد که همواره $X_n > 0$ و $\frac{X_{n+1}}{X_n} \to L > 1$ ، آنگاه :

$$X_n \to \infty$$

(اثبات این قضیه را به متعلمین واگذار می کنیم).

۲۴۰۱: بخش بیست و چهارم

قضیه اول کوشی:

اگر $\{X_n\}$ به L همگرا باشد، آنگاه دنباله $\{a_n\}$ با $a_n=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ نیز به L همگراست

برهان:

بافرض $C_n=X_n-L$، داریم:

$$a_n=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}=\frac{(C_1+L)+(C_2+L)+\cdots+(C_n+L)}{n}$$

$$=\frac{C_1+C_2+\cdots+C_n+nL}{n}=\frac{C_1+C_2+\cdots+C_n}{n}+L$$

برای اینکه ثابت کنیم که، $a_n\to L$، کافی است ثابت کنیم که:

$$\frac{C_1+C_2+\cdots+C_n}{n}\to 0 \qquad (1)$$

چون $C_n=X_n-L$ و $X_n\to L$، داریم: $C_n\to 0$ بنابراین، به ازای $\varepsilon>0$ مفروض یک عدد طبیعی مانند m موجود است به طوری که

$$|C_n|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{به ازای هر } n\geq m \text{ ،} \qquad (2)$$

چون C_n همگرا به صفر است، کراندار است و لذا، عددی حقیقی مانند $M>0$ موجود است به طوری که:

$$|C_n|<M \qquad \text{به ازای هر } n\geq m \text{ ،} \qquad (3)$$

حال به اثبات (۱) می پردازیم

$$\left|\frac{C_1+C_2+\cdots+C_n}{n}-0\right|=\left|\frac{C_1+C_2+\cdots+C_n}{n}\right|$$

$$= \frac{1}{n} \left| C_1 + C_2 + \cdots + C_m + C_{m+1} + \cdots + C_n \right|$$

$$\leq \frac{1}{n} \left[\left(|C_1| + |C_2| + \cdots + |C_m| \right) + \left(|C_{m+1}| + \cdots + |C_n| \right) \right]$$

به استناد(۳)

$$\leq \frac{1}{n} \left[\overbrace{(M + M + \cdots + M)}^{m \text{ مرتبه}} + \overbrace{\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2} \right)}^{(n-m) \text{ مرتبه}} \right]$$

$$= \frac{1}{n} \left[mM + (n-m) \frac{\varepsilon}{2} \right]$$

$$= \frac{Mm}{n} + \left(\frac{n-m}{2n} \right) \varepsilon$$

$$< \frac{Mm}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4)$$

حال ملاحظه می کنیم که $\frac{Mm}{n} \to 0$ وقتی که $n \to \infty$ و بنابراین عدد مثبتی مانند q موجود است به طوری که:

$$\left| \frac{Mm}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$ به ازای هر $n \geq q$ ،

$$\frac{Mm}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$ به ازای هر $n \geq q$ ،

از این رو اگر $P = \operatorname{Max}\{m, q\}$ خواهیم داشت:

$$\left| \frac{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{n} - 0 \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$ به ازای هر $n \geq p$ ،

این نشان می دهد که:

$$\frac{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{n} \to 0$$

از (۱) نتیجه میشود که:

$$a_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \to L$$

تبصره ۱ : دنباله $\{a_n\}$ را که در بالا تعریف شده ، دنباله میانگین‌های حسابی دنباله $\{X_n\}$ می‌نامند.

تبصره ۲ : عکس حکم بالا برقرار نیست ، یعنی ، ممکن است که دنباله میانگین‌های حسابی دنباله $\{X_n\}$ همگرا باشد ولی خود دنباله $\{X_n\}$ همگرا نباشد .به عنوان مثال اگر

$$X_n=(-1)^n$$

آنگاه ،

$$a_n = \frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد ،} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد ،} \end{cases}$$

در نتیجه $a_n \to 0$ وقتی $n \to \infty$ ولی ، چنان که می دانیم دنباله $\{(-1)^n\}$ همگرا نیست.

۲۵۰۱ : بخش بیست و پنجم

قضیه دوم کوشی:

اگر $\{X_n\}$ یک دنباله با جمل مثبت باشد و $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{X_{n+1}}{X_n}$ موجود باشد (متناهی یا نامتناهی) آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}(X_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{X_{n+1}}{X_n} .$$

برهان :

حالت اول : فرض می‌کنیم $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{X_{n+1}}{X_n} = L$ و L متناهی باشد . بنابراین به ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض عدد صحیح مثبتی مانند m موجود است به طوری که :

به ازای هر $n \geq m$ ،

$$\left|\frac{X_{n+1}}{X_n} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

یا

به ازای هر $n \geq m$ ،

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{X_{n+1}}{X_n} < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

از اینرو، به ازای $n=m, m+1, \dots, n-1$، داریم:

$$L-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{X_{m+1}}{X_m}<L+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$L-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{X_{m+2}}{X_{m+1}}<L+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$L-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{X_n}{X_{n-1}}<L+\frac{\varepsilon}{2}$$

که از ضرب آنها نتیجه می شود:

$$\left(L-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-m}<\frac{X_n}{X_m}<\left(L+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-m}$$

که اگر طرفین را به توان $\frac{1}{n}$ نیز برسانیم، خواهیم داشت:

$$\left(L-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{m}{n}}<\frac{(X_n)^{\frac{1}{n}}}{(X_m)^{\frac{1}{n}}}<\left(L+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{m}{n}}$$

$$(X_m)^{\frac{1}{n}}\cdot\left(L-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{m}{n}}<(X_n)^{\frac{1}{n}}<\left(L+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{m}{n}}\cdot(X_m)^{\frac{1}{n}} \quad (1)$$

حال اگر $n\to\infty$ آن گاه،

$$(X_m)^{\frac{1}{n}}\cdot\left(L-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{m}{n}}\longrightarrow L-\frac{\varepsilon}{2}$$

و

$$\left(L+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{m}{n}}\cdot(X_m)^{\frac{1}{n}}\longrightarrow L+\frac{\varepsilon}{2}$$

بنابراین، به ازای $\varepsilon>0$ اعداد صحیح مثبتی مانند m_1 و m_2 موجودند به طوری که:

به ازای هر $n \geq m_1$ ، $\left|(X_m)^{\frac{1}{n}} \cdot (L-\frac{\varepsilon}{2})^{1-\frac{m}{n}} - (L-\frac{\varepsilon}{2})\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

به ازای هر $n \geq m_2$ ، $\left|(X_m)^{\frac{1}{n}} \cdot (L+\frac{\varepsilon}{2})^{1-\frac{m}{n}} - (L+\frac{\varepsilon}{2})\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

که از آنها نتایج زیر بدست می آید.

(۲) به ازای هر $n \geq m_1$ ، $(L-\varepsilon) < (X_m)^{\frac{1}{n}} (L-\frac{\varepsilon}{2})^{1-\frac{m}{n}} < L$

(۳) به ازای هر $n \geq m_2$ ، $L < (X_m)^{\frac{1}{n}} (L+\frac{\varepsilon}{2})^{1-\frac{m}{n}} < (L+\varepsilon)$

فرض می‌کنیم که $P = \max\{m, m_1, m_2\}$ از ترکیب (۱)، (۲)، (۳) بدست می آوریم:

به ازای هر $n \geq p$ ، $L-\varepsilon < (X_n)^{\frac{1}{n}} < L+\varepsilon$

یا به ازای هر $n \geq p$ ، $-\varepsilon < (X_n)^{\frac{1}{n}} + (-L) < \varepsilon$

یا به ازای هر $n \geq p$ ، $\left|(X_n)^{\frac{1}{n}} - p\right| < \varepsilon$

و نتیجه می گیریم که:

$$\lim_{n} (X_n)^{n} = L = \lim_{n\to\infty} \frac{X_{n+1}}{X_n}$$

حالت دوم:

اگر:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_{n+1}}{X_n} = \infty$$

در این حالت،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{X_{n+1}} = 0$$

یا

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{X_{n+1}}}{\frac{1}{X_n}} = 0$$

که مقدار متناهی است لذا، به استناد حالت اول،

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{X_n}\right)^{\frac{1}{n}} = 0$$

که از آن نتیجه می‌شود که :

$$\lim_{n\to\infty}(X_n)^{\frac{1}{n}} = \infty$$

تبصره : ممکن است ، $\lim_{n\to\infty}(X_n)^{\frac{1}{n}}$ موجود باشد ولی ، $\lim_{n\to\infty}\frac{X_{n+1}}{X_n}$ موجود نباشد.به عبارت دیگر عکس قضیه دوم کوشی الزاما درست نمی باشد .

به عنوان مثال فرض می کنیم $X_n = ۲^{-n+(-1)^n}$ ، آنگاه :

$$(X_n)^{\frac{1}{n}} = [۲^{-n+(-1)^n}]^{\frac{1}{n}} = ۲^{\left(\frac{-n+(-1)^n}{n}\right)} = ۲^{-1+\frac{(-1)^n}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}(X_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} ۲^{-1+\frac{(-1)^n}{n}} = ۲^{-1} = \frac{1}{۲}$$

اما:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_{n+1}}{X_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{۲^{-n-1+(-1)^{n+1}}}{۲^{-n+(-1)^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} ۲^{[-1+(-1)^{n+1}-(-1)^n]}$$

اگر n زوج باشد، $= ۲^{(-1-1-1)} = ۲^{-3} = \frac{1}{8}$

و اگر n فرد باشد، $= ۲^{(-1+1+1)} = ۲$

بنابراین ، $\lim_{n\to\infty}\frac{X_{n+1}}{X_n}$ موجود نمی باشد .

مثال ۱) نشان دهید که دنباله $\{X_n\}$ با رابطه بازگشتی $X_1 = 1$ و $X_n = \sqrt{۲ + X_{n-1}}$ همگراست و حد آن ۲ است .

حل: ملاحظه می کنیم که $X_2 > X_1$ و اگر $n > 1$ ، $X_n > X_{n-1}$ آنگاه:

$$\sqrt{۲+X_n} > \sqrt{۲+X_{n-1}}$$

یا به ازای هر n ، $X_{n+1} > X_n$

بنابـراین $\{X_n\}$ اکیدا صعودی است .حال ثابت می کنیم که این دنباله از بالا به ۲ کراندار است.یعنی ثابت می کنیم که

$$X_n \leq 2 \quad , \quad \text{به ازای هر } n \qquad (1)$$

اثبات به‌استقراء: چون $X_1 = 1 < 2$ ،(۱) به ازای $n = 1$ درست است.اگر فرض کنیم (۱) به ازای عدد طبیعی و دلخواه n برقرار باشد ، آنگاه

$$X_{n+1} = \sqrt{2 + X_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$$

که نشان می دهد که (۱) به ازای $n+1$ نیز برقرار است .

در نتیجه ، به استناد اصل استقرای ریاضی ، (۱) به ازای هر عدد طبیعی n برقراراست.

بنابر این چون دنباله $\{X_n\}$ صعودی و از بالا کراندار است ، همگراست.

فرض می کنیم $\lim\limits_{n \to \infty} X_n = L$

رابطه $X_{n+1} = \sqrt{2 + X_n}$ را بصورت معادل زیر می نویسیم:

$$(X_{n+1})^2 = 2 + X_n$$

بنابر این ، $\lim\limits_{n \to \infty} (X_{n+1})^2 = \lim\limits_{n \to \infty} (2 + X_n)$

و نتیجه می گیریم که L در معادله $L^2 = 2 + L$ صدق می کند که ریشه هایش عبارتند از: $L = -1$ و $L = 2$. چنـان که می دانیم ، یک دنباله صعودی کراندار به کوچکترین کران بـالای خـود همگـراست و بدیهی است که -1 نمتواند کوچکترین کران بالای دنباله‌ای با جمل مثبت باشد(ملاحظه کنید که جمل این دنباله مثبت‌اند).

بنابراین $\lim\limits_{n \to \infty} X_n = 2$

مثـال۲) اگر $X_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ ، نشان دهید که $\{X_n\}$ نزولی و همگراست.

حل :

با تبدیل n به $n+1$ داریم :

$$X_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)$$

$$X_{n+1}-X_n=\frac{1}{n+1}-Ln(n+1)+Ln(n)$$

$$=\frac{1}{n+1}-Ln(\frac{n+1}{n})=\frac{1}{n+1}-Ln(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{n+1}-(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\cdots)$$

$$[\ Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-+\cdots]$$

که از آن نتیجه می شود که:

$$X_{n+1}-X_n<\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}$$

$$=\frac{2n^2-2n(n+1)+(n+1)}{2n^2(n+1)}$$

$$=\frac{-n+1}{2n^2(n+1)}<0$$

بنابر این به ازای هر n ، $X_{n+1}\leq X_n$ یعنی $\{X_n\}$ نزولی است.

همچنین، به ازای هر n ، $X_n>0$ بنابر این، دنباله $\{X_n\}$ نزولی و از پایین کراندار و از این رو همگراست.

مثال۳) اگر همواره $a_n>0$ ، $b_n>0$ ، $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$ ، $b_{n+1}=\sqrt{a_n\cdot b_n}$ ، ثابت کنید که:

الف) دنباله های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ یکنوایند.

ب) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. یعنی هر دو دنباله به یک حد همگرایند.

حل:

a_{n+1} میانگین حسابی a_n و b_n است و b_{n+1} میانگین هندسی آنهاست. چنان که می دانیم، میانگین حسابی دو عدد مثبت همواره بزرگتر یا مساوی میانگین هندسی آنهاست.

بنابر این،

$$\frac{a_n+b_n}{2}\geq\sqrt{a_n\cdot b_n}$$ به ازای هر n ،

درنتیجه:

(۱) به ازای هر n ، $a_{n+1} \geq b_{n+1}$

که از آن نتیجه می شود که:

به ازای هر n ، $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \leq \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n$

لذا دنباله $\{a_n\}$ نزولی است و

(۲) به ازای هر n ، $a_n \leq a_1$

دوباره به استناد (۱) ،

به ازای هر n ، $b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n} \geq \sqrt{a_n \cdot b_n} = b_n$

که نشان می دهد که $\{b_n\}$ صعودی است و

(۳) به ازای هر n ، $b_n \geq b_1$

همچنین به استناد (۱) ،

(۴) به ازای هر n ، $a_n \geq b_n$

(۳) و (۴) نیز ایجاب می‌کنند که ، به ازای هر n ، $a_n > b_1$. یعنی دنباله $\{a_n\}$ از پایین به b_1 کراندار می باشد .

بنابراین ، دنباله $\{a_n\}$ همگراست . فرض می کنیم که $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

از (۲) و (۴) نیز نتیجه می گیریم که به ازای هر n ، $b_n > a_1$. یعنی دنباله $\{b_n\}$ ازبالا به a_1 کراندار می باشد .

بنابراین دنباله $\{b_n\}$ نیز همگراست . فرض می کنیم که $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + b_n) = \frac{1}{2}(\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n)$$

یا $a = \frac{1}{2}(a+b)$ ، که مستلزم $a = b$ است .

مثال ۴) نشان دهید که : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = 1$

حل : اگر فرض کنیم ،

(۱) به ازای هر n ، $a_n = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$

آنگاه به ازای هر n ، $a_n > 1$ و از اینرو ، اگر قرار دهیم $a_n = 1 + b_n$ ، آنگاه

$b_n > 0$ به ازای هر n ، (۲)

در (۱) به جای a_n قرار می‌دهیم $1 + b_n$ ، بدست می آوریم

$$1 + b_n = n^{\frac{1}{n}}$$

اگر طرفین را به توان n برسانیم و از بسط دو جمله‌ای استفاده کنیم ، خواهیم داشت:

$$n = 1 + nb_n + \frac{n(n-1)}{2!}(b_n)^2 + \dots + (b_n)^n$$

که از آن نامساوی‌های زیر بدست می آید :

به ازای هر $n \geq 2$ ، $n > \frac{n(n-1)}{2!}(b_n)^2$

به ازای هر $n \geq 2$ ، $(b_n)^2 < \frac{2!}{n-1}$

به ازای هر $n \geq 2$ ، $b_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$

به استناد (۲) و (۳) داریم :

$$0 < b_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

چون $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$ ، قضیه افشردگی ایجاب می کند که $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

آنگاه ، به استناد (۲) ،

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(1 + b_n)$$
$$= 1 + 0 = 1$$

تبصره : این مثال را می توان از راه دوم نیز حل نمود.

اگر فرض کنیم که $X_n = n$ آنگاه ، $\frac{X_{n+1}}{X_n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ و بنابراین ، $\lim_{n\to\infty} \frac{X_{n+1}}{X_n}$

اینرو به استناد قضیه دوم کوشی (بخش ۲۵) ،

$$\lim_{n\to\infty} (X_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{X_{n+1}}{X_n}$$
$$= 1$$

یعنی
$$\lim_{n\to\infty}(n)^{\frac{1}{n}}=1$$

مثال ۵) نشان دهید که دنباله $\{X_n\}$ با
$$X_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}$$
به صفر همگراست.

حل:

$$X_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}$$

$$>\frac{1}{(2n)^2}+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}=\frac{n}{(2n)^2}=\frac{1}{4n} \qquad (1)$$

همچنین
$$X_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}$$

$$\leq\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

$$=\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n} \qquad (2)$$

به استناد (۱) و (۲)، داریم:

$$\frac{1}{4n}<X_n<\frac{1}{n} \qquad (3)$$
به ازای هر n،

امّا می دانیم که: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. بنابراین، اگر از طرفین (۳) وقتی $n\to\infty$ حد بگیریم:

داریم:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n}\leq\lim_{n\to\infty}X_n\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

یا
$$0\leq\lim_{n\to\infty}X_n\leq 0$$

که از آن نتیجه می شود:
$$\lim_{n\to\infty}X_n=0$$

برای یک راه‌حل دیگر به مثال ۷ بخش ۱۵ مراجعه کنید.

مثال ۶) نشان دهید که:

الف) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+\dots+n^{\frac{1}{n}}\right)=1$

ب) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$

ج) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)=0$

د) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2+n)^{\frac{1}{n}}=1$

حل الف:

فرض می کنیم که $a_n=n^{\frac{1}{n}}$ آنگاه: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}=1$

بنابراین به استناد قضیه اول کوشی، $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}=1$

یعنی، $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+\dots+n^{\frac{1}{n}}\right)=1$

حل ب:

فرض می کنیم $a_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ آنگاه:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$$

بنابراین، به استناد قضیه اول کوشی،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}=1$$

یا $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$

یا
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$$

حل ج :

فرض می کنیم $a_n=\frac{1}{n}$ آنگاه :
$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1$$
بنابراین ، به موجب قضیه اول کوشی ،
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$$

یا
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=0$$

حل د:

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(n(n+1))^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}$$
که به استناد حکم مثال۴:
$$=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1$$

مثال ۷) اگر $X_n=\left[\left(\frac{2}{1}\right)^1\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}$ ، نشان دهید که
$$\lim_{n\to\infty}X_n=e$$

حل :

فرض می‌کنیم ،
$$a_n=\left(\frac{2}{1}\right)^1\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

با تبدیل n به n+۱ داریم :
$$a_{n+1}=\left(\frac{2}{1}\right)^1\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$
بنابراین :
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$
که‌از آن نتیجه می شود:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e$$

[به مثال ۶ بخش ۱۵ مراجعه کنید]

حال ملاحظه می کنیم که : $X_n=(a_n)^{\frac{1}{n}}$.

در نتیجه ، با استفاده از قضیه دوم کوشی ، داریم :

$$\lim_{n\to\infty} X_n=\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=e$$

مثال ۸) اگر $X_n=\frac{n!}{n^n}$ ، نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} X_n=0$.

با تبدیل n به $n+1$ داریم :

$$X_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

بنابراین :

$$\frac{X_n}{X_{n+1}}=\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n!}$$

$$=\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

و

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{X_{n+1}}=e$$

که از آن به استناد جبر حدود ، نتیجه می گیریم که :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_{n+1}}{X_n}=\frac{1}{e}<1$$

اکنون قضیه ۲۲.۱ ایجاب می کند که :

$$\lim_{n\to\infty} X_n=0$$

مثال ۹) اگر $\alpha\geq 0$ یک عدد حقیقی ثابت باشد ، حد $\lim_{n\to\infty}\alpha^{\frac{1}{n}}$ را محاسبه کنید.

حل :

حالت اول : فرض می کنیم $\alpha=1$. در اینصورت، به ازای هر n ، $\alpha^{\frac{1}{n}}=1$ و

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^{\frac{1}{n}}=1$$

حالت دوم : فرض می کنیم که $\alpha>1$. اگر فرض کنیم $\alpha^{\frac{1}{n}}=1+h$ ، آنگاه $h>0$ و

$$\alpha=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2!}h^2+\cdots\geq 1+nh$$

که از آن نامساوی $h \leq \frac{\alpha-1}{n}$ بدست می آید بنابراین ،

$$0 < h \leq \frac{\alpha-1}{n}$$

با حد گیری از طرفین خواهیم داشت $0 < \lim\limits_{n\to\infty} h < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha-1}{n} = 0$ که مستلزم $\lim\limits_{n\to\infty} h = 0$ است.

چون $\alpha^{\frac{1}{n}} = 1 + h$ ، نتیجه می گیریم که: $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{\frac{1}{n}} = 1$

حالت سوم: اگر $0 < \alpha < 1$ آنگاه $\frac{1}{\alpha} > 1$ ، بنابراین ، به استناد حالت دوم

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

که از آن به استناد جبر حدود ، لازم می آید که: $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{\frac{1}{n}} = 1$

بنابراین ،از حالتهای اول ،دوم ،سوم نتیجه می گیریم که:

به ازای هر α مثبت ثابت ، $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{\frac{1}{n}} = 1$

حالت چهارم: اگر $\alpha = 0$ آنگاه ، به ازای هر n $\alpha^{\frac{1}{n}} = 0$ و در نتیجه $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{\frac{1}{n}} = 0$

مثال ۱۰) ثابت کنید که :

الف) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = e$

ب) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$

ج) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+4n} - n\right) = 2$

د) $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{(n^2+1)^{\frac{1}{8}} - (n+1)^{\frac{1}{4}}\right\} = 0$

ه) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{X^n}{n!} = 0 \qquad X \in R$

برهان الف:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

$$=e\cdot 1=e$$

توجه کنید که:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

برهان ب:

$$X_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

چون همواره $\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$ داریم: هر،

(۱) به ازای هر n، $X_n>0$

بعلاوه

$$X_n=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$=\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

(۲)

$$\leq\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

اکنون (۱) و (۲) ایجاب می کنند که:

به ازای هر n،

$$0<X_n<\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

با حد گیری از طرفین خواهیم داشت:

$$0<\lim_{n\to\infty}X_n<\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}=0$$

که مستلزم $\lim_{n\to\infty}X_n=0$ است.

اثبات ج را به متعلمین واگذار می کنیم.

برهان د:

با فرض $X_n = (n^2+1)^{\frac{1}{8}} - (n+1)^{\frac{1}{4}}$ می توان نوشت:

$$X_n = \{(n^2+1)^{\frac{1}{8}} - (n^2)^{\frac{1}{8}}\} + \{(n^2)^{\frac{1}{8}} - (n+1)^{\frac{1}{4}}\}$$

$$= \{(n^2+1)^{\frac{1}{8}} - (n^2)^{\frac{1}{8}}\} - \{(n+1)^{\frac{1}{4}} - (n)^{\frac{1}{4}}\}$$

$$= a_n - b_n \qquad (1)$$

که در آن $a_n = (n^2+1)^{\frac{1}{8}} - (n^2)^{\frac{1}{8}}$ و $b_n = (n+1)^{\frac{1}{4}} - (n)^{\frac{1}{4}}$. ملاحظه می کنیم که:

$$0 \leq b_n = (n+1)^{\frac{1}{4}} - (n)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\{(n+1)^{\frac{1}{4}} - (n)^{\frac{1}{4}}\} \cdot \{(n+1)^{\frac{1}{4}} + (n)^{\frac{1}{4}}\}}{(n+1)^{\frac{1}{4}} + (n)^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{(n+1)^{\frac{1}{2}} - (n)^{\frac{1}{2}}}{(n+1)^{\frac{1}{4}} + (n)^{\frac{1}{4}}} = \frac{(n+1) - n}{\{(n+1)^{\frac{1}{2}} + (n)^{\frac{1}{2}}\} \cdot \{(n+1)^{\frac{1}{4}} + (n)^{\frac{1}{4}}\}}$$

$$\leq \frac{1}{\{(n+1)^{\frac{1}{2}} + (n)^{\frac{1}{2}}\} \cdot \{(n+1)^{\frac{1}{4}} + (n)^{\frac{1}{4}}\}}$$

$$\leq \frac{1}{(n^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}) \cdot (n^{\frac{1}{4}} + n^{\frac{1}{4}})}$$

$$= \frac{1}{(2n^{\frac{1}{2}}) \cdot (2n^{\frac{1}{4}})} = \frac{1}{4\sqrt{n}}$$

که اگر از طرفین حد بگیریم، داریم:

$0 \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4\sqrt{n}} = 0$ که مستلزم $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ است.

به طور مشابه می توانیم ثابت کنیم که $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ در نتیجه، با استفاده از (۱) داریم:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = 0 - 0 = 0$$

برهان ه:

فرض می کنیم که X یک عدد حقیقی دلخواه باشد و $a_n = \frac{X^n}{n!}$ ملاحظه می کنیم که:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{X^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{X^n}\right| = \frac{|X|}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 < 1$$

از اینرو به استناد قضیه ۲۲.۱،

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

مثال ۱۱) ثابت کنید که دنباله $X_n = \left(\frac{(3n)!}{(n!)^3}\right)^{\frac{1}{n}}$ همگراست.

حل:

فرض می کنیم که $X_n = \left(\frac{(3n)!}{(n!)^3}\right)^{\frac{1}{n}}$ و $a_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$.

با تبدیل n به $n+1$ داریم:

$$a_{n+1} = \frac{(3(n+1))!}{((n+1)!)^3}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^3}$$

بنابراین:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^3} \cdot \frac{(n!)^3}{(3n)!} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3}$$

$$\frac{(3n)^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{3n}\right)\left(1+\frac{1}{3n}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} = \frac{3^3\left(1+\frac{2}{3n}\right)\left(1+\frac{1}{3n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3^3 = 27$$

لذا به استناد قضیه دوم کوشی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 27$$

مثال ۱۲)

الف) نشان دهید که اگر دنباله $\{X_n\}$ همگرا و دنباله $\{Y_n\}$ واگرا باشند، آنگاه دنباله $\{X_n+Y_n\}$ واگراست.

ب) نشان دهید که اگر $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ و $\{Y_n\}$ یک دنباله نوسانی متناهی باشد، آنگاه دنباله $\{X_n \cdot Y_n\}$ همگرا به صفر است.

حل الف:

فرض می کنیم $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ و $\{Y_n\}$ واگرا باشد.

حالت اول: $\lim_{n\to\infty} Y_n = \infty$ ، k را عدد دلخواه مثبتی در نظر بگیرید.

چون $X_n \to \infty$ به ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض، یک عدد صحیح مثبت مانند m_1 موجود است به طوری:

$|X_n - X| < \varepsilon$ ، به ازای هر $n \geq m_1$

$X - \varepsilon < X_n < X + \varepsilon$ ، به ازای هر $n \geq m_1$ (۱)

و چون $Y_n \to \infty$ ، یک عدد صحیح مثبت مانند m_2 موجود است به طوری:

$Y_n > k - (X - \varepsilon)$ ، به ازای هر $n > m_2$ (۲)

اگر $m = \max\{m_1 و m_2\}$ به استناد (۱) و (۲)، داریم:

$X_n > X - \varepsilon$ ، به ازای هر $n \geq m$

$Y_n > k - X + \varepsilon$ ، به ازای هر $n \geq m$

در نتیجه، $X_n + Y_n > k$ ، به ازای هر $n > m$

بنابر این، دنباله $\{X_n+Y_n\}$ واگرا به ∞ است.

حالت دوم: $\lim_{n\to\infty} Y_n = -\infty$ به طریق مشابه می توان نشان داد که $X_n+Y_n \to -\infty$.

حل ب :

چـون $\{Y_n\}$ نوسانی متناهی است ، بنا به تعریف ، کراندار است . یعنی یک عدد صحیح مثبت مانند k موجود است که :

(۱) $|Y_n| \leq k$ به ازای هر n ،

فـرض می کنیم کـه ε عدد مثبت دلخواهی باشد چون $X_n \to 0$ ، یک عدد صحیح مثبت مانند m موجود است به طوری که:

(۲) $|X_n| < \frac{\varepsilon}{k}$ به ازای هر $n \geq m$

حال به استناد (۱) و(۲)، $|X_n . Y_n - 0| = |X_n . Y_n| = |X_n| \, |Y_n|$

به ازای هر $n \geq m$ ، $|X_n| \, |Y_n| < k \cdot \frac{\varepsilon}{k}$

و بنابراین ، $\lim\limits_{n \to \infty} X_n . Y_n = 0$

مثال ۱۳) دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ را چنان مثال بزنید که :

الف) $a_n \to +\infty$ و $b_n \to -\infty$ ، ولی $\{a_n + b_n\}$ همگرا باشد .

ب) $a_n \to +\infty$ و $b_n \to -\infty$ ، ولی $\{a_n + b_n\}$ به $-\infty$ واگرا باشد .

حل الف:

اگـر فـرض کنیم که $a_n = n$ و $b_n = -n$ ، آنگاه $a_n \to +\infty$ و $b_n \to -\infty$ ، ولی $a_n + b_n = n - n = 0 \to 0$

حل ب :

اگر فرض کنیم که $a_n = n$ و $b_n = -2n$ ، آنگاه $a_n \to +\infty$ و $b_n \to -\infty$ ، ولی $a_n + b_n = -n \to -\infty$

مثال ۱۴) باذکر مثال ، نشان دهید که :

الف) ممکن است هر دو دنباله $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ واگرا باشند ولی دنباله $\{Y_n + X_n\}$ همگرا یا واگرا باشد .

ب) ممکن است هیچ یک از دنباله $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ همگرا نباشند ولی دنباله $\{Y_n \cdot X_n\}$ همگرا باشد .

حل الف :

کافی است دنباله‌های مثال ۱۳ را مجددا در نظر بگیرید.

تبصره : اگر هر دو دنباله $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ واگر به $+\infty$ (یا $-\infty$) باشند. آنگاه $\{Y_n+X_n\}$ نیز واگر به $+\infty$ (یا $-\infty$) است.

حل ب :

هیچ یک از دنباله های $X_n=(-1)^n$ و $Y_n=(-1)^n$ همگرا نیست ولی

به ازای هر n ، $Y_n.X_n=(-1)^{2n}=1$

بنابراین $\{Y_n.X_n\}$ به ۱ همگراست.

مثال ۱۵) مثالهایی از دنباله های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ بیاورید که.

الف) $a_n \to \infty$ و $\{b_n\}$ همگرا باشد، اما $\{a_n.b_n\}$ واگرا به $+\infty$ باشد.

ب) $a_n \to \infty$ و $\{b_n\}$ همگرا باشد، اما $\{a_n.b_n\}$ همگرا باشد.

ج) $a_n \to \infty$ و $\{b_n\}$ همگرا باشد، اما $\{a_n.b_n\}$ نوسانی باشد.

حل الف :

اگر فرض کنیم $a_n=n^2$ و $b_n=\frac{1}{n}$ ، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$.

ولی $a_n.b_n=n^2.\frac{1}{n}=n\to\infty$.

حل ب :

اگر فرض کنیم $a_n=n$ و $b_n=\frac{1}{n^2}$ ، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$.

ولی $a_n.b_n=n.\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\to 0$.

حل ج :

اگر فرض کنیم $a_n=n$ و $b_n=\frac{(-1)^n}{n}$ ، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$.

ولی $a_n.b_n=(-1)^n$ ، که نشان دهید که دنباله $\{a_n.b_n\}$ نوسانی است.

مثال ۱۶) مثالی از یک دنباله صعودی پیدا کنید که:

الف) همگرا باشد. ب) واگرا باشد.

حل الف :

فرض می کنیم که $X_n=\frac{n}{n+1}$. با تبدیل n به $n+1$ داریم $X_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}$.

بنابر این :

$$X_{n+1} - X_n = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$ به ازای هر n .

و نتیجه می گیریم که به ازای هر n ، $X_{n+1} > X_n$. یعنی $\{X_n\}$ صعودی است.

اما $$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

و ، بنابراین $\{X_n\}$ همگراست.

حل ب :

اگر فرض کنیم $X_n = n$ ، آنگاه :

به ازای هر n ، $X_{n+1} - X_n = n + 1 - n = 1 > 0$

بنابراین دنباله $\{X_n\}$ صعودی است.اما $\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$

مثال ۱۷) مثالی از یک دنباله نزولی بیاورید که :

الف) همگرا باشد . ب) واگرا باشد .

حل الف :

فرض می کنیم که $X_n = \frac{1}{n}$. با تبدیل n به $n+1$ داریم : $X_n = \frac{1}{n+1}$. بنابراین،

$$X_{n+1} - X_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$ به ازای هر n ،

و نتیجه می گیریم که به ازای هر n ، $X_{n+1} < X_n$. یعنی $\{X_n\}$ نزولی است.

اما $\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. بنابراین $\{X_n\}$ همگراست.

حل ب :

اگر فرض کنیم $X_n = -n$ ، آنگاه $X_{n+1} = -(n+1) = -n-1$. بنابراین ،

به ازای هر n ، $X_{n+1} - X_n = -1 < 0$

یعنی ، به ازای هر n ، $X_{n+1} < X_n$

از اینرو $\{X_n\}$ نزولی است .

اما $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \lim\limits_{n\to\infty}(-n) = -\infty$.

مثال ۱۸) مثالی از یک دنباله بیاورید که :

الف) صعودی باشد. ب) نزولی باشد .

ج) یکنوا نباشد د) صعودی باشد ولی از بالا کراندار نباشد.

ه) نزولی باشد ولی از پایین کراندار نباشد. و) کراندار باشد ولی یکنوا نباشد.

حل الف :

$X_n = n$ یا $X_n = \frac{n}{n+1}$.

این دو ، دنباله‌هایی از نوع دنباله های یکنوای صعودی هستند.(رجوع کنید به مثال ۱۶).

حل ب :

$X_n = \frac{1}{n}$ ، $X_n = -n$.

حل ج :

دنباله $\{(-1)^n\}$ نه صعودی است و نه نزولی .

حل د :

$X_n = n$ ، (مثال ۱۶ را ملاحظه کنید)

حل ه :

$X_n = -n$ ، (مثال ۱۷ را ببینید)

حل و :

$X_n = (-1)^n$.

مثال ۱۹) اگر $X_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2n}$ ، m را چنان تعیین کنید که:

$|X_n - 1| < \frac{1}{10^3}$ به ازای هر $n \geq m$

حل: ملاحظه می کنیم که:

$$|X_n - 1| = \left|1 + \frac{(-1)^n}{2n} - 1\right| = \left|\frac{(-1)^n}{2n}\right| = \frac{1}{2n}$$

در نتیجه، نامساوی $|X_n - 1| < \frac{1}{10^3}$ وقتی برقرار است که $\frac{1}{2n} < \frac{1}{10^3}$

و یا $2n > 10^3 = 1000$ و یا $n > 500$

از این رو $|X_n - 1| < \frac{1}{10^3}$ به ازای هر $n \geq 501$

و نتیجه می گیریم که $m = 501$

مثال ۲۰) اگر $S_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n^2}$ ، m را چنان تعیین کنید که:

$|S_n - 2| < \frac{1}{10^4}$ به ازای هر $n \geq m$

حل: ملاحظه می کنیم که:

$$|S_n - 2| = \left|2 + \frac{(-1)^n}{n^2} - 2\right| = \left|2 - 2 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$$

بنابراین نامساوی $|S_n - 2| < \frac{1}{10^4}$ وقتی برقرار است که $n^2 > 10^4$ یا $n > 10^2$

از اینرو به ازای هر $n > 100$ ، $|S_n - 2| < \frac{1}{10^4}$ و نتیجه می‌گیریم که $m = 100$.

مثال ۲۱) نشان دهید که دنباله $\{a_n\}$ با رابطه بازگشتی $a_1 = \sqrt{2}$ و $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ به ۲ همگراست.

حل: داریم:

(۱) به ازای هر n ، $a_1 = \sqrt{2}$ $\quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$

در مرحله اول نشان می دهیم که $\{a_n\}$ صعودی است، یعنی،

(۲) به ازای هر n ، $a_{n+1} > a_n$

اثبات به استقراست. از (۱) نتیجه می گیریم که:

$$a_2 = \sqrt{2a_1} = \sqrt{2\sqrt{2}}$$

می دانیم کـه $\sqrt{۲} > ۱$ بنابراین به ازای $۲\sqrt{۲} > ۲$ که نامساوی $\sqrt{۲\sqrt{۲}} > \sqrt{۲}$ یا $a_۲ > a_۱$ را ایجاب می کند.

بنابر (۲)این به ازای $n = ۱$ درست می‌باشد.

حال فرض می کنیم که (۲) به ازای $n = K$ نیز برقرار باشد، یعنی $a_{K+۱} > a_K$. آنگاه

$$۲a_{K+۱} > ۲a_K$$
$$\sqrt{۲a_{K+۱}} > \sqrt{۲a_K}$$

از اینرو به استناد (۱)، $a_{K+۲} > a_{K+۱}$

یعنی (۲) به ازای $n = k+۱$ نیز درست است و این اثبات را به استقراء تمام می کند.

در مرحله دوم، نشان می دهیم که $\{a_n\}$ از بالا به عدد ۲ کراندار است یعنی،

(۳) به ازای هر n، $a_n < ۲$

به ازای $n = ۱$ داریم $a_۱ = \sqrt{۲} < ۲$. بنابراین (۳) به ازای $n = ۱$ درست است.

فرض می‌کنیم (۳) به ازای $n = k$ درست باشد یعنی $a_K < ۲$، آنگاه

$$۲a_K < ٤$$

یا، $\sqrt{۲a_K} < ٤$

یعنی $a_{K+۱} < ۲$. بنابراین، (۳) به ازای $n = k+۱$ نیز درست می باشد.

اکنون به استناد (۲)و(۳) دنباله $\{a_n\}$ صعودی و از بالا کرانداراست. بنابراین، دنباله $\{a_n\}$ همگرا می باشد.

حال اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = L$، و از طرفین (۱) حد بگیریم، خواهیم داشت:

$$L = \sqrt{۲L}$$

یا، $L^۲ = ۲L$

چـون دنبـالـه فـوق یکنوای صعودی است و $a_۱ = \sqrt{۲}$ و $L \geq \sqrt{۲} > ۰$ از اینرو با حذف L ازطرفین تساوی بالا نتیجه می گیریم که $L = ۲$.

مثال ۲۲) نشان دهید که دنباله $\{u_n\}$ با رابطه بازگشتی $u_۱ = \sqrt{۷}$ و $u_{n+۱} = \sqrt{۷ + u_n}$ به ریشه مثبت معادله $x^۲ - x - ۷ = ۰$ همگراست.

حل:

دنباله $\{u_n\}$ با رابطه بازگشتی زیر تعریف شده است:

(۱) به ازای هر n ، $u_1=\sqrt{7}$ ، $u_{n+1}=\sqrt{7+u_n}$

در مرحله اول، بااستفاده از اصل استقرا، نشان می دهیم که $\{u_n\}$ صعودی است یعنی،

(۲) به ازای هر n ، $u_{n+1}>u_n$

بنا به تعریف،

$$u_2=\sqrt{7+u_1}=\sqrt{7+\sqrt{7}}>\sqrt{7+0}=\sqrt{7}=u_1$$

یعنی، (۲) به ازای $n=1$ درست است.

فرض می کنیم (۲) به ازای $n=k$ درست باشد، یعنی $u_{k+1}>u_k$. آنگاه:

$$7+u_{k+1}>7+u_k$$

یا

$$\sqrt{7+u_{k+1}}>\sqrt{7+u_k}$$

که نامساوی $u_{k+2}>u_{k+1}$ را ایجاب می کند. درنتیجه (۲) به‌ازای $n=k+1$ نیزبرقراراست.

در مرحله دوم، مجددا با استناد اصل استقراء نشان می دهیم که $\{u_n\}$ از بالا به ۷ کراندار است. یعنی،

(۳) به ازای هر n ، $u_n<7$.

به ازای $n=1$ داریم: $u_1=\sqrt{7}<7$. بنابراین (۳) به ازای $n=1$ درست است.

حال فرض می کنیم که (۳) به ازای $n=k$ نیز درست باشد، یعنی $u_k<7$. آنگاه $u_k+7<14$، که از آن نتیجه می شود.

$$u_{k+1}=\sqrt{u_k+7}<14<7$$

بنابراین، (۳) به ازای $n=k+1$ نیز درست است.

از (۲)(۳) نتیجه می‌شود که $\{u_n\}$ یک دنباله یکنوای صعودی و از بالا کراندار و، و بنابراین همگراست.

اکنون اگر فرض کنیم $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=L$ و از طرفین (۱) حد بگیریم خواهیم داشت:

$$L=\sqrt{7+L}$$

یا $L^2 - L - 7 = 0$

که از حل آن بدست می آوریم

$$L = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

چـون جمل دنباله مثبت می باشند، $L \geq 0$. لذا L ریشه مثبت معادله $x^2 - x - 7 = 0$ و برهان تمام است.

مثال ۲۳) نشان دهید که دنباله $\{X_n\}$ با رابطه بازگشتی $X_1 = \sqrt{2}$ و $X_{n+1} = \sqrt{2 + X_n}$ به ریشه مثبت معادله $x^2 - x - 2 = 0$ همگرا می باشد.

حل:

اثبات مشابه است و به متعلمین واگذار می شود.

مثال ۲٤) فرض کنید که $0 < a < b$. اگر $S_1 = a$ و $S_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + S_n^2}{a+1}}$، نشان دهید که دنباله $\{S_n\}$ همگراست. حد آن را پیدا کنید.

حل:

دنباله $\{S_n\}$ با رابطه بازگشتی زیر تعریف شده است:

$$S_1 = a \text{ و } S_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + S_n^2}{a+1}} \quad ، n \in N \qquad (1)$$

در مرحله اول، با استفاده از اصل استقراء، ثابت می‌کنیم که $\{S_n\}$ از بالا به b کراندار است، یعنی،

$$S_n < b \quad \text{به ازای هر } n \text{ ،} \qquad (2)$$

بـه استناد مفروضات، $S_1 = a < b$. بنابراین، (۲) به ازای $n = 1$ برقرار است. فرض می کنیم (۲) به ازای $n = k$ نیز درست باشد بنابراین $S_k < b$. از (۱) بدست می آوریم:

$$-b^2 + S_{k+1}^2 = \frac{ab^2 + S_k^2}{a+1} - b^2$$

$$= \frac{ab^2 + S_k^2 - ab^2 - b^2}{a+1}$$

$$= \frac{S_k^2 - b^2}{a+1} < 0$$

بنابـراین، $S_{k+1}^2 < b^2$ یا $S_{k+1} < b$.(توجه کنید که جمل دنباله مثبت می باشند)
از این رو، (۲) به ازای $n = k+1$ نیز درست است.

حال ملاحظه می کنیم که:

$$S_{n+1}^2 - S_n^2 = \frac{ab^2 + S_n^2}{a+1} - S_n^2$$

$$= \frac{ab^2 + S_n^2 - S_n^2 - aS_n^2}{a+1} = \frac{ab^2 - aS_n^2}{a+1}$$

$$= \frac{a}{a+1}(b^2 - S_n^2) > 0$$

بنابراین، به ازای هر n، $S_{n+1} > S_n$. لذا $\{S_n\}$ صعودی است.

در نتیجه $\{S_n\}$ که صعودی و از بالا کراندار است، همگراست.

اگر فرض کنیم $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L$، و از طرفین (۱) حد بگیریم، خواهیم داشت:

$$L = \sqrt{\frac{ab^2 + L^2}{a+1}}$$

کـه اگر طرفین رامجذور کنیم و جمل مساوی رااز طرفین حذف کنیم، معادله $L^2 = b^2$ بدست می آیـد از این رو، $L = \pm b$. چـون جمل دنباله $\{S_n\}$ مثبت هستند، $L \geq 0$ لذا $L = b$ تنها جواب قابل قبول است. بنابراین ثابت کردیم که $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = b$

مثال ۲۵) اگر

$S_1 > 0$, $S_2 > 0$, $S_1 \neq S_2$ و $S_{n+1} = \frac{1}{2}(S_n + S_{n-1})$; $n > 1$.

نشـان دهیـد که یکی از دو دنباله $\{S_{2n+1}\}_1^\infty$ و $\{S_{2n}\}_1^\infty$ صعودی و دیگری نزولی است، ولی هردو به حد مشترک $\frac{1}{3}(S_1 + 2S_2)$ همگرایند.

فرض کنید $m \in N$. از رابطه بازگشتی مفروض نتیجه می شود که:

$$2S_{2m+1} = S_{2m} + S_{2m-1}$$

$$2S_{2m} = S_{2m-1} + S_{2m-2}$$

$$2S_{2m+1} + S_{2m} = S_{2m} + 2S_{2m-1} + S_{2m-2}$$

اگر تساوی اخیر را به صورت

$$2(S_{2m+1}-S_{2m-1}) = 2S_{2m-2}-S_{2m}$$

بنویسیم، متوجه می شویم که اگر یکی از دو دنباله $\{S_{2n-1}\}_1^\infty$ و $\{S_{2n}\}_1^\infty$ صعودی باشد دیگری نزولی است. (*)

مجددا به استناد رابطه بازگشتی مفروض،

$$2S_{n+1}= S_n+S_{n-1}$$

$$S_{n+1}-S_n= S_{n-1}-S_{n+1}$$

$$= S_{n-1}-\frac{1}{2}(S_n+S_{n-1})$$

$$=-\frac{1}{2}(S_n-S_{n-1})$$

از اینرو، وقتی n مقادیر ۲، ۴، ...، ۲m را اختیار کند، خواهیم داشت:

$$S_3-S_2=-\frac{1}{2}(S_2-S_1)$$

$$S_4-S_3=-\frac{1}{2}(S_3-S_2)=(-\frac{1}{2})^2(S_2-S_1) \qquad (1)$$

$$\vdots$$

$$S_{2m+1}-S_{2m}=(-\frac{1}{2})^{2m-1}(S_2-S_1)$$

با حد گیری از آخرین رابطه، بدست می آوریم. (**)

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1}-\lim_{m\to\infty} S_{2m}=\lim_{m\to\infty}(-\frac{1}{2})^{2m-1}(S_2-S_1)=0\,(S_2-S_1)=0$$

که نشان می دهد که هر دو دنباله به یک حد همگرایند.

---

* توجه کنید که، مثلا اگر $S_1<S_2$ آنگاه دنباله $\{S_{2n-1}\}_1^\infty$ صعودی و دنباله $\{S_{2n}\}_1^\infty$ نزولی است. (م)

** متعلمین باید ثابت کنند که دنباله‌ای که نزولی باشد از پایین کراندار است و دنباله صعودی از بالا. بنابر این هر دو دنباله همگرایند. (م)

حال ،از جمع روابط (۱) نتیجه می‌گیریم که :

$$S_{2m+1} - S_2 = \left[\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2m+1} \right](S_2 - S_1)$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2m-1}\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}(S_2 - S_1)$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2m+1}\right](S_2 - S_1)$$

که مستلزم

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = S_2 - \frac{1}{3}(S_2 - S_1) = \frac{1}{3}(S_1 + 2S_2)$$

و برهان تمام است.

بخش بیست و ششم :

زیر دنباله

تعریف: دنبالـه $\{Y_k\}$ را یک دنبالـه‌از دنباله $\{X_n\}$ می نامند در صورتی که یک دنباله‌از اعداد صحیح مثبت مانند $\{n_k\}$ موجود باشد به طوری که

$$Y_k = X_{n_k} \quad , \quad n_1 < n_2 < n_3 \cdots$$

به عبارت دیگر،اگر $\{X_n\}$ دنباله مفروض باشدو $n_1 < n_2 < n_3 \cdots < n_k < \cdots$ دنبالـه‌ای‌از اعداد صحیح مثبت باشدو جمل دنباله $\{X_n\}$ را که‌متناظر با این اعداد هستند انتخاب و آنها را با اندیس k مرتب کنیم دنباله جدید یک زیر دنباله $\{X_n\}$ است .

به عنوان مثال‌اگر دنباله $\{X_n\}$ مفروض باشد دنباله

$$Y_1 = X_2 \text{ و } Y_2 = X_4 \text{ و } Y_3 = X_6 \text{ و} \ldots \text{و } Y_k = X_{2k} \text{ و} \ldots$$

زیر دنباله ای‌از $\{X_n\}$ متشکل از جمل با مراتب‌زوج آن‌است. و

$Y_1 = X_1$ و $Y_2 = X_3$ و $Y_3 = X_5$ و ... و $Y_k = X_{2k-1}$ و ...

زیر دنباله ای از $\{X_n\}$ متشکل از جمل با مراتب فرد آن است.

بنابراین برای استخراج یک زیر دنباله از دنباله ای معلوم باید به ترتیب زیر عمل کنیم:

الف- یک دنباله اکیداصعودی ازاعدادطبیعی پیداکنیم فرض کنید $\{n_k\}$ چنین دنباله‌ای می‌باشد

ب- جمل X_{n_1} ، X_{n_2} ، X_{n_3} ، ... ، X_{n_k} ،...، رااز دنباله $\{X_n\}$ انتخاب کنیم و آنها را Y_1 ، Y_2 ، Y_3 ، ... ، Y_k ، ... ، بنامیم. در این صورت دنباله $\{Y_n\}$ یک زیر دنباله، دنباله $\{X_n\}$ است.

تبصره:

۱- این شرط که دنباله اعداد صحیح مثبت $\{n_k\}$ باید اکیدا صعودی باشد این حقیقت را روشن می‌سازد که جمل های زیر دنباله به همان ترتیبی ظاهر میشوند که در دنباله اصلی ظاهر شده اند. بنابراین، دنباله { ... ٦ و ٤ و ٢ و ٨ } یک زیر دنباله { ... و ٥ و ٤ و ٣ و ٢ و ١ } نیست زیرا ترتیب جمل ٨ و ٢ در دنباله اول با ترتیب این جمل در دنباله دوم سازگار نیست.

۲- اگر X_m یک جمله از زیر دنباله $\{X_n\}$ باشد آن گاه n_i یی بزرگتر از m موجود است به طوری که X_{n_i} تعلق به آن زیر دنباله است.

۳- جمل زیردنباله الزاما بانظم خاصی انتخاب نمی‌شوند مثلا جمل زیردنباله $\{X_1$ و X_5 و X_{11} و X_{16} ...$\}$ با نظم خاصی انتخاب نشده اند، ولی جمل زیردنباله $\{X_2$ و X_4 و X_6 و X_8 ... $\}$ با نظم خاصی انتخاب شده اند.

٤- هر زیر دنباله به تنهایی یک دنباله است.

٥- هر دنباله بی نهایت زیر دنباله دارد.

٦- هر دنباله زیر دنباله‌ای از خودش محسوب می شود.

بخش بیست و هفتم:

قضیه:

اگر دنباله $\{X_n\}$ به l همگرا باشد، هر زیر دنباله آن نیز به l همگرا است.

اثبات: فرض کنیم $\{Y_k\}$ با $Y_k = X_{nk}$ یک زیر دنباله از دنباله $\{X_n\}$ باشد.
فرض کنید ε عدد مثبت دلخواهی باشد. چون $\{X_n\}$ به l همگرا است یک عدد صحیح مثبت مانند m موجود است به طوری که:

$$|X_n - l| < \varepsilon \quad ، \quad n \geq m \text{ به ازای هر} \qquad (۱)$$

چون $\{n_k\}$ دنباله ای اکیدا صعودی از اعداد طبیعی است اگر $k > m$ آنگاه $n_k > m$ و بنابراین از (۱) نتیجه می‌گیریم که:

$$|X_{nk} - l| < \varepsilon \quad ، \quad k > m \text{ به ازای هر} \qquad (۲)$$

اما $Y_k = X_{nk}$ از این رو، (۲) به ایجاب می‌کند که:

$$|Y_k - l| < \varepsilon \quad ، \quad k > m \text{ به ازای هر}$$

این نشان‌می‌دهد که $\lim_{k \to \alpha} Y_k = l$ و برهان تمام است.

توجه کنید که ممکن است دنباله‌ای همگرا نباشد ولی بعضی از زیردنباله‌هایش همگرا باشد. به عنوان مثال دنباله $\{X_n\}$ با $X_n = (-۱)^n$ واگرا است ولی زیر دنباله‌های $\{X_{۲n-۱}\}$ و $\{X_{۲n}\}$ از آن، به ترتیب به ۱- و ۱ همگرایند

عکس قضیه بالا به معنی زیر برقرار است:

قضیه:

اگر همه زیردنباله $\{X_n\}$ به یک حدمانند l همگرا باشند، آنگاه $\{X_n\}$ نیزبه l همگرااست.

برهان: چون هر زیر دنباله از دنباله $\{X_n\}$ به l همگرااست و هر دنباله یک زیر دنباله خود محسوب می‌شود، دنباله $\{X_n\}$ نیز به l همگرا می‌باشد.

نتیجه: دنباله $\{X_n\}$ فقط و فقط وقتی واگرا است که حداقل یک زیر دنباله از آن واگرا باشد یا دو زیر دنباله از آن به دو حد متفاوت همگرا باشند.

مثلا دنباله ...و n و ۱ و ... و ٤ و ۱ و ۳ و ۱ و ۲ و ۱ و ۱ و ۱

واگرا است زیرا دنباله متشکل از جمل مراتب زوج آن واگرا است. دنباله $\{(-۱)^n\}$ نیز واگرااست زیرا دنباله‌های متشکل از جمل مراتب زوج و فرد آن به دو حد متفاوت همگرایند.

۲۸۰۱: بخش بیست و هشتم:

قضیه:

الف) اگر دنباله $\{X_n\}$ به $+\infty$ واگرا باشد، هر زیر دنباله آن نیز به $+\infty$ واگرا است.

ب) اگر دنباله $\{X_n\}$ به $-\infty$ واگرا باشد، هر زیر دنباله آن نیز به $-\infty$ واگرا است.

برهان الف

فرض کنیم $\{Y_k\}$ یک زیر دنباله از دنباله $\{X_n\}$ باشد که در آن $Y_k = X_{nk}$.

چون $X_n \to \infty$ به ازای $M > 0$ مفروض یک عدد صحیح مثبت مانند m موجود است به طوری که :

$$X_n > M \quad ، \quad n \geq m \text{ به ازای هر} \tag{1}$$

چون $\{n_k\}$ دنباله اکیدا صعودی از اعداد طبیعی است، اگر $k > M$ آنگاه $n_k > M$ و بنابراین از (۱) نتیجه می‌گیریم که :

$$X_{nk} > M \quad ، \quad k > m \text{ به ازای هر} \tag{2}$$

یا به استناد تعریف زیر دنباله $\{Y_k\}$ ،

$$Y_k > M \quad ، \quad k > m \text{ به ازای هر}$$

این نشان می‌دهد که $\lim_{k \to \infty} Y_k = \infty$ و برهان تمام است.

توجه کنید که ممکن است بعضی از زیر دنباله های یک دنباله به ∞ (یا $-\infty$) واگرا باشند ولی دنباله مفروض نه به ∞ واگرا باشد نه به $-\infty$. مثلا ، اگر ،

$X_n = n$ اگر n زوج باشد،

$X_n = -n$ اگر n فرد باشد،

آنگاه زیر دنباله های $\{X_{2n}\}$ و $\{X_{2n-1}\}$ آن به ترتیب ، به ∞ و $-\infty$ واگرایند ولی دنباله $\{X_n\}$ نوسانی نامتناهی است.

عکس قضیه بالا به معنی زیر برقرار است .

اگر همه زیر دنباله های دنباله $\{X_n\}$ واگرا به ∞ (یا $-\infty$) باشند دنباله $\{X_n\}$ نیز واگرا به ∞ (یا $-\infty$) است.

۲۹۰۱: بخش بیست و نهم

نقطه قله یک دنباله

تعریف: عدد طبیعی m را یک نقطه قله دنباله $\{X_n\}$ می‌نامند در صورتی که

به ازای هر $n>m$ ، $X_n<X_m$

توجه: برای یک دنباله اکیدا نزولی هر عدد طبیعی یک نقطه قله محسوب می شود.

برهان:

فرض کنید m یک عدد طبیعی دلخواه باشد چون $\{X_n\}$ اکیدا نزولی است داریم :

به ازای هر $n>m$ ، $X_n<X_m$

بنابراین m یک نقطه قله است.

تبصره:

هیچ دنباله اکیدا صعودی نقطه قله ندارد.

توضیحات :

۱: هر عدد طبیعی نقطه قله برای دنباله $\{\frac{1}{n}\}$ است .

برهان : کافی است توجه کنید که این دنباله اکیدا نزولی است.

۲: دنباله $\{(-1)^n\}$ نقطه قله ندارد .

برهان : فرض کنید m یک نقطه قله برای این دنباله باشد .اگر m فرد باشد آن گاه $X_{m+1}=1>X_m$. اگر m زوج باشد آن گاه $X_{m+2}=X_m$. از این رو ، چنین نیست که نامساوی $X_n<X_m$ به ازای هر $n>m$ بر قرار باشد.

۳: اگر m یک عدد طبیعی دلخواه باشد دنباله

$$X_n=\begin{cases}1 & \text{اگر } n=1,2,\dots,m \\ -1 & \text{اگر } n>m\end{cases}$$

دقیقا یک نقطه قله دارد .و آن m است.

٤: اگر m یک عدد طبیعی باشد، دنباله

$$X_n=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{اگر } n=1,2,\dots,m \\ -1 & \text{اگر } n>m\end{cases}$$

دقیقا m تقطه قله دارد .در واقع هر یک از نقاط ۱ و ۲ و...و m یک نقطه قله است.

۱. ۳ : بخش سی ام

قضیه:

هر دنباله حداقل یک زیر دنباله یکنوا دارد.

برهان:

حالت اول : دنباله مفروض دارای بی نهایت نقاط قله است .

فرض می کنیم این نقاط قله عبارت باشند از n_1 ، n_2 ، n_3 ، ... ، و ... $< n_3 < n_2 < n_1$

بنابراین $\{X_{nk}\}$ یک زیر دنباله $\{X_n\}$ است .

چون n_1 یک نقطه قله است و $n_2 > n_1$ ، $X_{n2} < X_{n1}$ یا $X_{n1} > X_{n2}$ (بنا به بخش ۲۹)

چون n_2 یک نقطه قله است و $n_3 > n_2$ ، $X_{n3} < X_{n2}$ یا $X_{n2} > X_{n3}$.

در نتیجه $X_{n1} > X_{n2} > X_{n3}$. با ادامه این روند ، دیده می شود که ... $X_{n1} > X_{n2} > X_{n3}$.

بنابر این $\{X_{nk}\}$ یک زیر دنباله اکیدا نزولی از دنباله $\{X_n\}$ می باشد و برهان تمام است .

حالت دوم : دنباله مفروض دارای تعدادی متناهی نقاط قله است . فرض می کنیم m_1 ، m_2 ، ... ، m_p نقاط قله دنباله $\{X_n\}$ باشند.

فرض می کنیم n_1 یک عدد طبیعی باشد که از هر یک از نقاط قله m_1 ، m_2 ، ... ، m_p بزرگتر باشد . بنابراین ، n_1 یک نقطه قله نیست و ، لذا عددی طبیعی مانند n_2 موجود است به طوری که $n_2 > n_1$ و $X_{n2} > X_{n1}$.

چون n_2 یک نقطه قله نیست ، عددی طبیعی مانند n_3 موجود است به طوری که $n_3 > n_2$ و $X_{n3} \geq X_{n2}$. تا این جا، سه عدد طبیعی n_1 ، n_2 ، n_3 را طوری تعیین کرده ایم که $n_1 < n_2 < n_3$ و $X_{n1} \leq X_{n2} \leq X_{n3}$. با ادامه این فرآیند یک دنباله صعودی مانند $\{X_{nk}\}$ به دست می آید که زیر دنباله $\{X_n\}$ است.

حالت سوم : دنباله مفروض دارای نقطه قله نمی باشد.

بنابراین ، ۱ نقطه قله نمی باشد. با در نظر گرفتن $n_1=1$ و تکرار حالت دوم نتیجه حاصل می گردد.

۳۱۰۱ : بخش سی و یکم

قضیه بولتسانو- وایرشتراس

قضیه: هر دنباله کراندار حداقل یک زیر دنباله همگرا دارد.

برهان : فرض می کنیم $\{X_n\}$ یک دنباله کراندار باشد. به استناد قضیه ۳۰.۱ ، $\{X_n\}$ یک زیر دنباله یکنوا مانند $\{X_{nk}\}$ دارد. چون $\{X_n\}$ کراندار است، زیر دنباله $\{X_{nk}\}$ نیز کراندار می باشد. بنابراین ، $\{X_{nk}\}$ یک دنباله یکنوای کراندار و ، در نتیجه ، همگرا است.

۳۲۰۱ : بخش سی و دوم

دنباله کوشی:

تعریف: دنباله $\{X_n\}$ را یک دنباله کوشی نامند اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض یک عدد صحیح مثبت مانند P (وابسته به ε) موجود باشد به طوری که

به ازای هر $n \geq P$ و هر $m \geq P$ ، $|X_n - X_m| < \varepsilon$.

۳۳۰۱ : بخش سی و سوم

قضیه:

هر دنباله کوشی کراندار است.

برهان : فرض می کنیم $\{X_n\}$ یک دنباله کوشی باشد. یعنی ، به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض یک عدد صحیح مثبت مانند P موجود است به طوری که

(۱) به ازای هر $n \geq P$ و m ، $|X_n - X_p| < \varepsilon$.

بنابراین ، (۱) به ازای $m=P$ نیز برقرار است. یعنی ،

به ازای هر $n \geq P$ ، $|X_n - X_m| < \varepsilon$

لذا :

$$|X_n| = |X_n - X_P + X_P|$$
$$< |X_n - X_P| + |X_P|$$
$$< \varepsilon + |X_P|$$

به ازای هر $n \geq P$ ،

ازاین رو،اگرفرض کنیم $M = \max\{ |X_1| و |X_2| و ... و |X_{P-1}| و \varepsilon + |X_P| \}$ آنگاه

به ازای هر n ، $|X_n| \leq M$

و نتیجه می‌گیریم که $\{X_n\}$ کراندار است.

۳۴۰۱ : بخش سی و چهارم

قضیه:

هر دنباله همگرا یک دنباله کوشی است و بالعکس.

برهان لزوم:

فرض می کنیم $\{X_n\}$ بـه l همگرا باشد. بنابراین، به ازای $\varepsilon > 0$ عدد صحیح مثبتی مانند p موجود است به طوری که:

$$|X_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{به ازای هر } n \geq P \text{ ،} \qquad (1)$$

حال اگر فرض کنیم $n \geq P$ و m ، آن گاه

$$\begin{aligned} |X_n - X_m| &= |X_n - l + l - X_m| \\ &< |X_n - l| + |l - X_m| \\ &= |X_n - l| + |X_m - l| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

به استناد (۱)

بنابراین، $\{X_n\}$ یک دنباله کوشی است.

برهان کفایت:

فرض می کنیم $\{X_n\}$ یک دنباله کوشی باشد. بنابراین، $\{X_n\}$ کراندار است و دارای یک زیر دنباله همگرا مانند $\{X_{nk}\}$ می باشد. فرض می کنیم این زیر دنباله به l همگرا باشد.

فرض می کنیم ε یک عدد مثبت دلخواه باشد. چون دنباله $\{X_n\}$ یک دنباله کوشی است، بنابراین یک عدد صحیح مثبت مانند P موجود است به طوری که

$$|X_n - X_m| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{به ازای هر } m \text{ و } n \geq P \text{ ،}$$

چون $\{X_{nk}\}$ به l همگرا است، یک عدد صحیح مثبت مانند n_k موجود است به طوری که:

به ازای هر $n_k > n_{k_0}$ ، $|X_{nk}-l| < \frac{\varepsilon}{۲}$

اگر فرض کنیم $t = Max\{P \text{ و } n_{k_0}\}$ ، آنگاه

(۱) به ازای هر $m > t$ و n ، $|X_n - X_m| < \frac{\varepsilon}{۲}$

(۲) به ازای هر $n_k > t$ ، $|X_{nk}-l| < \frac{\varepsilon}{۲}$

بدیهی است که (۱) به ازای $m = n_k$ و هر $n \geq t$ نیز برقرار است. از این رو ،

$$|X_n - l| = |X_n - X_{nk} + X_{nk} - l|$$
$$< |X_n - X_{nk}| + |X_{nk} - l|$$

به استناد (۱) و (۲)، $< \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon$

بنابراین، دنباله $\{X_n\}$ همگرا و برهان کفایت تمام است.

تبصره :

۱ـ قضیه بالا را به صورت زیر می توان بیان کرد :

دنباله $\{X_n\}$ از اعداد حقیقی همگرا است اگر و فقط اگر به ازای هر $\varepsilon > ۰$ مفروض یک عدد صحیح مثبت مانند P موجود باشد به طوری که

به ازای هر $m \geq P$ و n ، $|X_n - X_m| < \varepsilon$

۲ـ چنان که دیدیم، هر دنباله کوشی از اعداد حقیقی همگرا است. این خاصیت را که معادل اصل موضوع کمال میدان مرتب اعداد حقیقی است، اصل عمومی همگرایی کوشی می‌نامند.

۳ـ میدان مرتب اعداد گویا کامل نیست ، زیرا مثلا دنباله

۱/۴ و ۱/۴۱ و ۱/۴۱۴ و ۱/۴۱۴۲ و ...

یک دنباله کوشی از اعداد گویا است که به هیچ عدد گویایی میل نمی‌کند. (حد آن عدد اصم $\sqrt{۲}$ است .)

توجه : قضیه بخش ۳۴ را می توان به‌عنوان آزمونی جهت اثبات عدم همگرایی بعضی از دنباله ها به کار برد . یعنی ،اگر دنباله $\{X_n\}$ چنان باشد که به ازای مقدار معینی از $\varepsilon > ۰$ و به ازای هر عدد طبیعی P دو عدد طبیعی مانند n و m باشند که $m \geq P$ و n ولی $|X_n - X_m| \geq \varepsilon$ ، آنگاه دنباله $\{X_n\}$ واگرا است .

مثال ۱: ثابت کنید که دنباله های زیر دنباله های کوشی می باشند.

الف- $\{\frac{1}{n}\}$ ب- $\{\frac{1}{n^2}\}$ ج- $\{\frac{n}{n+1}\}$

د- $\{\frac{n+1}{n}\}$ هـ- $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$

حل(الف): فرض‌کنیم $X_n=\frac{1}{n}$ و ε عدد مثبت‌دلخواهی باشد. عدد طبیعی P را طوری تعیین می کنیم که $\frac{1}{P}<\varepsilon$. در این‌صورت به ازای هر دو عدد طبیعی m و n که n و $m\geq P$ ، خواهیم داشت:

$$|X_n-X_m|=|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}|=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}<\frac{1}{m}\leq\frac{1}{P}<\varepsilon$$

از این رو به استناد تعریف نتیجه می گیریم که $\{X_n\}$ یک دنباله کوشی است.

حل (ب): فرض کنیم $X_n=\frac{1}{n^2}$ و ε عدد مثبت دلخواهی باشد. فرض می کنیم P یک عدد طبیعی بزرگتر از $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ باشد دراین صورت، $\frac{1}{P^2}<\varepsilon$ واز این رو به ازای هر دو عدد طبیعی n و m که $n>m\geq P$ ، خواهیم داشت:

$$|X_n-X_m|=|\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}|=\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}<\frac{1}{m^2}\leq\frac{1}{P^2}<\varepsilon$$

این به استناد تعریف نشان می دهد که دنباله $\{X_n\}$ یک دنباله کوشی است.

حل(ج): فرض‌می کنیم $X_n=\frac{n}{n+1}$ ، فرض‌کنید n و m دو عدد طبیعی باشند و $n>m$ در این صورت

$$|X_n-X_m|=|\frac{n}{n+1}-\frac{m}{m+1}|$$

$$=|(1-\frac{1}{n+1})-(1-\frac{1}{m+1})|$$

$$=|\frac{1}{m+1}-\frac{1}{n+1}|$$

$$=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{n+1}<\frac{1}{m+1}$$

از این رو به ازای $\varepsilon>0$ مفروض، برای آن که $|X_n-X_m|<\varepsilon$ کافی است که

$\frac{1}{m+1} < \varepsilon$. امانامساوی $\frac{1}{m+1} < \varepsilon$ وقتی برقرار است که $m+1 > \frac{1}{\varepsilon}$ یا $m > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

بنابراین اگر P یک عدد طبیعی بزرگتر از $\frac{1}{\varepsilon} - 1$ باشد و n و m دو عدد طبیعی دلخواه باشند به طوری که $n > m > P$ ، خواهیم داشت :

$$|X_n - X_m| = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$< \frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{P+1} < \varepsilon$$

و این، بنا به تعریف، نشان می‌دهد که $\{X_n\}$ یک دنباله کوشی است.

حل(د): فرض کنیم $X_n = \frac{n+1}{n}$ ملاحظه می‌کنیم که اگر n و m دو عدد طبیعی باشند و $n > m$ آن‌گاه .

$$|X_n - X_m| = \left|\frac{n+1}{n} - \frac{m+1}{m}\right|$$

$$= \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{m}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m}$$

از این رو ادامه برهان مانند مثال الف است .

حل(ه): فرض کنیم $X_n = \frac{(-1)^n}{n}$ اگر n و m دو عدد طبیعی باشندو $n > m$ آنگاه.

$$|X_n - X_m| = \left|\frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^m}{m}\right|$$

$$< \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| - \left|\frac{(-1)^m}{m}\right|$$

$$< \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m}$$

نامساوی $\frac{2}{m} < \varepsilon$ وقتی برقرار است که $m < \frac{2}{\varepsilon}$. بنابراین اگر P یک عدد طبیعی بزرگتر از $\frac{2}{\varepsilon}$ باشد و n و m دو عدد طبیعی دلخواه باشند به طوری که $n > m \geq P$ خواهیم داشت :

$$|X_n - X_m| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

$$\leq \frac{۲}{m} \leq \frac{۲}{P} < \varepsilon$$

در نتیجه، $\{X_n\}$ یک دنباله کوشی است.

مثال ۲ : ثابت کنید که دنباله $\{۸ + \frac{۱}{n^۳}\}$ یک دنباله کوشی است و حد آن را پیدا کنید.

برهان : فرض می کنیم :

$$X_n = ۸ + \frac{۱}{n^۳}$$

اگر n و m دو عدد طبیعی باشند و $n > m$ ، آنگاه :

$$|X_n - X_m| = |(۸ + \frac{۱}{n^۳}) - (۸ + \frac{۱}{m^۳})|$$

$$= |\frac{۱}{n^۳} - \frac{۱}{m^۳}|$$

$$= \frac{۱}{m^۳} - \frac{۱}{n^۳} < \frac{۱}{m^۳}$$

بنابراین ،اگر ε یک عدد مثبت دلخواه باشد ، شرط کافی برای برقراری نامساوی $|X_n - X_m| < \varepsilon$ آن است که $\frac{۱}{m^۳} < \varepsilon$. اما نامساوی $\frac{۱}{m^۳} < \varepsilon$ وقتی برقرار است که $m^۳ > \frac{۱}{\varepsilon}$ یا $m > \frac{۱}{\sqrt[۳]{\varepsilon}}$.

از این رو ، اگر P یک عدد طبیعی بزرگتر از $\frac{۱}{\sqrt[۳]{\varepsilon}}$ باشد و n و m دو عدد طبیعی دلخواه باشند به طوری که $n > m \geq P$ خواهیم داشت :

$$|X_n - X_m| = |(\frac{۱}{n^۳} - \frac{۱}{m^۳})|$$

$$= \frac{۱}{m^۳} - \frac{۱}{n^۳} < \frac{۱}{m^۳} < \frac{۱}{p^۳} < \varepsilon$$

و نتیجه می گیریم که $\{X_n\}$ یک دنباله کوشی است.

حال ، با ملاحظه $X_n = ۸ + \frac{۱}{n^۳}$ دیده می شود که $\lim_{n\to\infty} X_n = ۸$ یعنی ، دنباله $\{X_n\}$ همگرا به ۸ است.

مثال ۳ : ثابت کنید که دنباله های زیر دنباله های کوشی نیستند.

الف- $\{(-۱)^n\}$

ب- $\{n^2\}$

ج- $\{(-1)^n . n\}$

برهان(الف) : فرض می‌کنیم $X_n=(-1)^n$ بنابراین،

$$X_{2n}=(-1)^{2n}=1 \quad \text{و} \quad X_{2n+1}=(-1)^{2n+1}=-1$$

اگر $\varepsilon=1$ بگیریم، ملاحظه می کنیم که:

$$|X_{2n+1}-X_n|=|-1-1|=|-2|=2>1$$

بنابراین $\{X_n\}$ یک دنباله کوشی نیست.

برهان(ب) : فرض می‌کنیم $X_n=n^2$.

بنابراین، $X_{n+1}=(n+1)^2=n^2+1+2n$.اگر $\varepsilon=1$ بگیریم، ملاحظه می کنیم که:

$$|X_{n+1}-X_n| = |n^2+1+2n-n^2|$$
$$= |2n+1|=2n+1>1$$ به ازای هر n ،

بنابراین، $\{X_n\}$ یک دنباله کوشی نیست.

برهان (ج) :

فرض می کنیم $X_n=(-1)^n . n$

لذا $X_{2n}=(-1)^{2n}.2n=2n$

و $X_{2n+1}=(-1)^{2n+1}.(2n+1)=-(2n+1)$

اگر $\varepsilon=1$ بگیریم، ملاحظه می کنیم که:

$$|X_{2n+1}-X_{2n}| = |-2n-1-2n|$$
$$= |-(4n+1)|$$
$$= 4n+1>1$$ به ازای هر n ،

بنابراین، $\{X_n\}$ یک دنباله کوشی نیست.

مثال ٤ : با استفاده از اصل عمومی همگرائی کوشی ، نشان دهید که دنباله $\{a_n\}$ با جمله عمومی زیر واگرا است :

الف- $a_n = ۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \cdots + \frac{۱}{۲n-۱}$

ب- $a_n = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{٤} + \frac{۱}{٦} + \cdots + \frac{۱}{۲n}$

حل(الف): $\varepsilon = \frac{۱}{۲}$ می‌گیریم . داریم :

$$a_n = ۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \cdots + \frac{۱}{۲n-۱}$$

$$a_{۲n} = ۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \cdots + \frac{۱}{٤n-۱} \qquad (۱)$$

بنابراین ،

$$a_{۲n} - a_n = \left(۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \cdots + \frac{۱}{۲n-۱} + \frac{۱}{۲n+۱} + \cdots + \frac{۱}{٤n-۱}\right) - \left(۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \cdots + \frac{۱}{۲n-۱}\right)$$

و ملاحظه می کنیم که :

$$a_{۲n} - a_n = \frac{۱}{۲n+۱} + \cdots + \frac{۱}{٤n-۱} > \frac{۱}{٤n} + \frac{۱}{٤n} + \cdots + \frac{۱}{٤n}$$

از این رو ،

$$a_{۲n} - a_n > n \cdot \frac{۱}{٤n} = \frac{۱}{٤}$$ به ازای هر n ،

که نشان می دهد که $\{a_n\}$ یک دنباله کوشی نیست .

حال با تبدیل n به $n+۱$ در (۱) ، داریم :

$$a_{n+۱} = ۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \cdots + \frac{۱}{۲n+۱}$$

$$= ۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \cdots + \frac{۱}{۲n-۱} + \frac{۱}{۲n+۱}$$

که از آن نتیجه می گیریم که :

به ازای هر n ، $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} > 0$

از این رو به ازای هر n ، $a_{n+1} > a_n$. یعنی $\{a_n\}$ اکیدا صعودی است . چون $\{a_n\}$ صعودی است ولی همگرا نیست ، الزاما واگرا به $+\infty$ است .

حل (ب) را به متعلمین واگذار می کنیم .

مثال ۵ : ثابت کنید که اگر زیر دنباله ای از یک دنباله کوشی به a همگرا باشد ، خود دنباله نیز به a همگرا می باشد.

برهان : فرض می کنیم $\{X_n\}$ یک دنباله کوشی باشد . بنابراین ، $\{X_n\}$ همگرا است . (قضیه بخش ۳٤)، فرض می‌کنیم $\lim_{n\to\infty} X_n = l$.

آن‌گاه همه زیر دنباله های $\{X_n\}$ به l همگرایند

اما بنا به فرض یک زیر دنباله $\{X_n\}$ به a همگرا می باشد از این رو ، لازم می آید که

$l = a$

مثال ٦ : الف- دو دنباله از اعداد گویا مثال بزنید که دنباله های کوشی باشند اما همگرا به اعداد گویا نباشند .

ب- دو دنباله از اعداد اصم مثال بزنید که دنباله های کوشی باشند ولی همگرا به اعداد اصم نباشند .

حل (الف) :

۱: دنباله، $\{1/4 , 1/41 , 1/414 , 1/4142 , \ldots\}$ یک دنباله از اعداد گویا و یک دنباله کوشی است ، ولی همگرا به $\sqrt{2}$ می باشد که یک عدد گویا نیست .

۲: دنباله، $\{1/7 , 1/73 , 1/732 , 1/7325 , \ldots\}$ یک دنباله از اعداد گویا و یک دنباله کوشی است ، ولی همگرا به $\sqrt{3}$ می باشد که یک عدد گویا نیست .

حل(ب): ۱: دنباله، $\{X_n\}$ با رابطه بازگشتی

$$X_1=\sqrt{2} \quad \text{و} \quad X_n=\sqrt{2X_{n-1}} \quad , n>1$$

یک دنباله از اعداد اصم است. چنان که در مثال ۲۱ (صفحه۷۸) دیدیم این دنباله همگراست.

بنابراین، دنباله مفروض یک دنباله کوشی از اعداد اصم است، ولی

$$\lim_{n\to\infty} X_n=2$$

۲: دنباله، $\{X_n\}$ با رابطه بازگشتی

$$X_1=\sqrt{2} \quad \text{و} \quad X_{n+1}=\sqrt{2+X_n} \quad , n>1$$

نیز یک دنباله از اعداد اصم است که به استناد مثال ۱ (صفحه ۶۰)، به ۲ همگراست.

بنابر این، دنباله مذکور یک دنباله کوشی از اعداد اصم است که حد آن اصم نیست.

مثال ۷ : اگر $\{X_{2n}\}$ و $\{X_{2n+1}\}$ دنباله های کوشی باشند. $\{X_n\}$ الزاما یک دنباله کوشی نیست.

حل : فرض کنید $X_n=(-1)^n$ می دانیم که $\{X_n\}$ یک دنباله کوشی نیست.

اما $X_{2n}=(-1)^{2n}=1$

بنابراین، $\{X_{2n}\}=\{1,1,1,1,\ldots\}$ که یک دنباله کوشی است.

همچنین $X_{2n+1}=(-1)^{2n+1}=-1$

بنابراین، $\{X_{2n+1}\}=\{-1,-1,-1,\ldots\}$ که یک دنباله کوشی است.

مثال ۸ : با استفاده از اصل عمومی کوشی، نشان دهید که اگر دنباله های $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ همگرا باشند، دنباله های زیر همگرایند:

الف- $\{X_n+Y_n\}$

ب- $\{X_nY_n\}$

حل (الف): فرض می‌کنیم ε یک عدد مثبت دلخواه باشد. چون $\{X_n\}$ همگراست یک دنباله کوشی است و از این رو یک عدد صحیح مانند P_1 موجود است به طوری که:

$$|X_n-X_m|<\frac{\varepsilon}{2} \quad , n \text{ و } m\geq P_1 \quad \text{به ازای هر} \quad (1)$$

به طور مشابه، چون $\{Y_n\}$ همگراو، بنابراین، یک دنباله کوشی است، یک عدد صحیح مانند

P_2 موجود است به طوری که:

(۲) به ازای هر n و $m \geq P_2$ ، $|Y_n - Y_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

حال اگر فرض کنیم $P = \max\{P_1 \text{ و } P_2\}$ آن گاه (۱) و (۲) به ازای هر n و $m \geq P$ برقرار است و ، از این رو ،

$$|(X_n+Y_n)-(X_m+Y_m)| = |(X_n-X_m)+(Y_n-Y_m)|$$
$$< |X_n-X_m| + |Y_n-Y_m|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{، } n \text{ و } m \geq P \text{ به ازای هر}$$

بنابراین ، $\{X_n + Y_n\}$ یک دنباله کوشی است ، و در نتیجه همگرا می باشد

برهان (ب): چون دنباله‌های $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ همگرایند ، کراندار نیز می باشند و ، بنابراین، اعداد $X > 0$ و $Y > 0$ موجودند به طوری که:

(۳) به ازای هر n ، $|Y_n| < Y$ و $|X_n| < X$

حال با تکرار استدلال بالا ، دیده می شود که دو عدد صحیح مثبت مانند M_1 و M_2 موجودند به طوری که:

(٤) به ازای هر n و $m > M_1$ ، $|X_n - X_m| < \frac{\varepsilon}{2X}$

(۵) به ازای هر n و $m > M_2$ ، $|Y_n - Y_m| < \frac{\varepsilon}{2Y}$

اگر $M = \max\{M_1 \text{ و } M_2\}$ آن گاه (۳) و (٤) و (۵) به ازای هر n و $m \geq M$ برقرار خواهند بود و خواهیم داشت:

$$|X_nY_n - X_mY_m| = |X_nY_n - X_nY_m + X_nY_m - X_mY_m|$$
$$= |X_n(Y_n - Y_m) + Y_m(X_n - X_m)|$$
$$\leq |X_n||Y_n - Y_m| + |Y_m||X_n - X_m|$$
$$< X\frac{\varepsilon}{2X} + Y\frac{\varepsilon}{2Y} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{، } n \text{ و } m \geq M \text{ به ازای هر}$$

بنابراین ، $\{X_nY_n\}$ یک دنباله کوشی است ، و در نتیجه همگرا می باشد

مثال ۹ : با استفاده از اصل عمومی همگرائی کوشی نشان دهید که $\{a_n\}$ با $a_n = ۱ + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + \dots + \frac{۱}{n^۲}$ همگرا است.

برهان : فرض می کنیم $n > m$ و ε یک عدد مثبت دلخواه باشد. آن گاه

$$|a_n - a_m| = \left|\left(۱ + \frac{۱}{۲^۲} + \dots + \frac{۱}{n^۲}\right) - \left(۱ + \frac{۱}{۲^۲} + \dots + \frac{۱}{m^۲}\right)\right|$$

$$= \left|\left[۱ + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + \dots + \frac{۱}{m^۲} + \frac{۱}{(m+۱)^۲} + \frac{۱}{n^۲}\right] - \left[۱ + \frac{۱}{۲^۲} + \dots + \frac{۱}{m^۲}\right]\right|$$

$$= \frac{۱}{(m+۱)^۲} + \frac{۱}{(m+۲)^۲} + \dots + \frac{۱}{n^۲}$$

$$= \frac{۱}{(m+۱)(m+۱)} + \frac{۱}{(m+۲)(m+۲)} + \dots + \frac{۱}{n \cdot n}$$

$$< \frac{۱}{m(m+۱)} + \frac{۱}{m(m+۲)} + \dots + \frac{۱}{(n-۱).n}$$

$$= \left(\frac{۱}{m} - \frac{۱}{m+۱}\right) + \left(\frac{۱}{m+۱} - \frac{۱}{m+۲}\right) + \dots + \left(\frac{۱}{(n-۱)} - \frac{۱}{n}\right)$$

$$< \frac{۱}{m} - \frac{۱}{n} < \frac{۱}{m} < \varepsilon$$

نامساوی $\frac{۱}{m} < \varepsilon$ وقتی برقرار است که $m > \frac{۱}{\varepsilon}$. از این رو، اگر P یک عدد طبیعی بزرگتر از $\frac{۱}{\varepsilon}$ باشد، از نامساوی بالا نتیجه می‌گیریم که:

به ازای هر m و $n \geq P$، $|a_n - a_m| < \varepsilon$

این نشان می دهد که $\{a_n\}$ یک دنباله کوشی است. لذا، به استناد اصل عمومی همگرایی کوشی همگرا است.

مثال ۱۰ : کدام یک از عبارات زیر درست است و کدام یک نادرست؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

الف- هر دنباله کراندار، همگرا است.

ب- $\left\{\frac{۱}{n} + \frac{۱}{n^۲}\right\}$ یک دنباله پوچ است.

ج- $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 0$

د- هر دنباله کوشی همگرا است.

هـ- هر دنباله همگرا یک دنباله کوشی است.

و- هر دنباله صعودی همگرا است.

ز- هر دنباله نزولی همگرا است.

حل :

عبارت **(الف)** نادرست است، زیرا، به عنوان مثال دنباله $\{(-1)^n\}$ یک دنباله کراندار است ولی همگرا نیست عبارت درست آن چنین است :

«هر دنباله کراندار یکنوا همگرا است.»

عبارت **(ب)** درست است، زیرا $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ و $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. و بنابراین ، $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) = 0$ ، که نشان می‌دهد که $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\}$ پوچ است.

عبارت **(ج)** نادرست است. عبارت صحیح این است : $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$

عبارت **(د)** درست است. (به بخش ۳٤ مراجعه کنید.)

عبارت **(هـ)** درست است. (به بخش ۳٤ مراجعه کنید.)

عبارت **(و)** نادرست است، زیرا مثلا $\{n\}$ یک دنباله صعودی است، ولی واگرا به ∞ .

عبارت صحیح این است :

«هر دنباله صعودی که از بالا کراندار باشد همگرا است.»

عبارت **(ز)** نادرست است، زیرا مثلا $\{-n\}$ یک دنباله نزولی است ولی واگرا به $-\infty$.

عبارت صحیح این است :

«هر دنباله نزولی که از پایین کراندار باشد همگرا است.»

مثال ۱۱ : کدام یک از عبارات زیر درست است و کدام یک نادرست ؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

الف- اگر $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ موجود باشد آن گاه $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ نیز موجود است.

ب- اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$ موجود باشد آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} a_n$ نیز موجود است.

ج- هر دنباله‌ای یک زیر دنباله همگرا دارد.

د- هر دنباله‌ای یک زیر دنباله یکنوا دارد.

هـ- اگر $\{X_n\}$ به l همگرا باشد، هر زیر دنباله از $\{X_n\}$ نیز به l همگراست.

و- اگر یک زیردنباله $\{X_n\}$ به l همگرا باشد، آن‌گاه $X_n \to l$.

ز- اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{X_{n+1}}{X_n} = l < 1$ ، آن‌گاه $X_n \to \infty$.

حل:

(الف): نادرست است، زیرا اگر $a_n = 2^{-n+(-1)^n}$ آن‌گاه

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = \left[2^{-n+(-1)^n}\right]^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{-n+(-1)^n}{n}} = 2^{-1+\frac{(-1)^n}{n}} \to 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

اما

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{-n-1+(-1)^{n+1}}}{2^{-n+(-1)^n}}$$

$$= 2^{-1+(-1)^{n+1}-(-1)^n}$$

$$= \begin{cases} 2^{-1+1+1} \\ 2^{-1-1-1} \end{cases} = \begin{cases} 2 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \\ \frac{1}{8} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \end{cases}$$

بنابراین، $\lim_{n\to} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ موجود نمی‌باشد.

(ب): نادرست است، زیرا فرض کنیم $a_n = (-1)^n$ ، $\{a_n\}$ همگرا نیست، ولی

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \end{cases}$$

و بنابراین، $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} = 0$

(ج): نادرست است، عبارت صحیح آن چنین است.

«هر دنباله کراندار یک زیر دنباله همگرا دارد.»

(د) : درست است .

(هـ) : درست است .

(و) : نـادرست‌است،زیرااگر فرض کنیم $X_n=(-1)^n$ ، زیردنباله $\{X_{2n}\} = \{1, 1, \ldots\}$ از $\{X_n\}$ همگراست ولی خود $\{X_n\}$ همگرا نیست.

(ز) : نادرست است .عبارت صحیح آن چنین است:

« اگر $\{X_n\}$ چنان باشد که $\frac{X_{n+1}}{X_n} \to l$ و $|l| < 1$ ، آنگاه $X_n \to 0$ ».

مثـال ۱۲ : کـدام یک از عبارات زیر درست است و کدام یک نادرست ؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید .

الف- اگر $\{X_n \pm Y_n\}$ همگرا باشد ، دنباله‌های $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ همگرایند.

ب- اگر $\{X_n Y_n\}$ همگرا باشد ، دنباله‌های $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ همگرایند.

ج- اگر $\{\frac{X_n}{Y_n}\}$ همگراباشد ، دنباله‌های $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ همگرایند.

د- اگر $\{|X_n|\}$ همگرا باشد ،دنباله $\{X_n\}$ نیز همگراست.

هـ- اگر $\{X_n+Y_n\}$ واگرا باشد ، دنباله‌های $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ واگرا می‌باشند.

حل :

(الف) : نادرست است ، زیرا :

۱- اگر $X_n=n$ و $Y_n=-n$ ، آنگاه دنباله $\{X_n+Y_n\}$ همگرا به صفر است ، اما دنباله $\{X_n\}$ واگرا به ∞ ، و $\{Y_n\}$ واگرا به $-\infty$ می باشد

۲- اگـر $X_n=n$ و $Y_n=n$ ، آنگـاه دنبـالـه $\{X_n-Y_n\}$ به صفرهمگراست، ولی دنباله‌های $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ واگرا به ∞ می باشد

(ب) : نادرست است ، زیرا :

اگـر $X_n=(-1)^n$ و $Y_n=(-1)^n$ ، آنگـاه بـه ازای هـر n ، $X_nY_n=(-1)^n.(-1)^n=(-1)^{2n}$.

بنابـراین ، $\{X_nY_n\}$ همگرا به ۱ است، اما هیچ یک از دنباله های $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ همگرا نیست.

(ج): نادرست است .

اگر $X_n=(-1)^n$ و $Y_n=(-1)^n$ ، آن گاه به ازای هر n ، $\frac{X_n}{Y_n} = \frac{(-1)^n}{(-1)^n}$. بنابراین $\{\frac{X_n}{Y_n}\}$ همگرا به ۱ است ، اما هیچ یک از دنباله‌های $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ همگرا نیست.

(د): نادرست است .

(هـ): نادرست است ، زیرا اگر ، اگر $X_n=n$ و $Y_n=1$ ، آنگاه $X_n+Y_n=(n+1)$. بنابراین ، $\{X_n+Y_n\}$ واگرا به ∞ است ، ولی $\{X_n\}$ واگرا و $\{Y_n\}$ همگرا است .

مثال ۱۳: اگر $a_n \to a$ و $b_n \to b$ ، آنگاه $\frac{1}{n}(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n) \to ab$.

برهان: به استناد مفروضات ، $\{a_nb_n\}$ به ab همگرا می باشد. در نتیجه ، با استفاده از قضیه اول کوشی ، داریم .

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n) = ab .$$

۳۵۰۱ : بخش سی و پنجم

نقاط انباشتگی یک دنباله (حدود زیر دنباله‌ای)

تعریف: عدد حقیقی l را یک نقطه انباشتگی دنباله $\{X_n\}$ می‌نامند در صورتی که یک زیر دنباله مانند $\{X_{nk}\}$ از $\{X_n\}$ موجود باشد که به l همگرا باشد. عدد l را همچنین یک حد زیر دنباله‌ای $\{X_n\}$ نیز می‌نامند.

تعریف: $+\infty$ را یک نقطه انباشتگی دنباله $\{X_n\}$ می‌نامند اگر زیر دنباله‌ای واگرا به $+\infty$ داشته باشد و $-\infty$ یک نقطه انباشتگی دنباله $\{X_n\}$ می‌نامند اگر زیر دنباله‌ای واگرا به $-\infty$ داشته باشد.

تبصره: در بحث از نقاط انباشتگی ، دستگاه منبسط اعداد حقیقی ، یعنی $R \cup \{-\infty \text{ و } \infty\}$ ، را در نظر می گیریم .

نتیجه ۱: اگر دنباله $\{X_n\}$ به l همگرا باشد . l تنها نقطه انباشتگی دنباله است .

زیرا فرض کنید $\{X_n\}$ به l همگرا باشد . بنابراین ، هر زیر دنباله $\{X_n\}$ نیز به l همگرا

است. در نتیجه، l تنها نقطه انباشتگی دنباله $\{X_n\}$ می‌باشد.

تبصره: هر دنباله که بیش از یک نقطه انباشتگی داشته باشد همگرا نتواند بود.

نتیجه ۲: اگر دنباله $\{X_n\}$ واگرا به $+\infty$ باشد، آن‌گاه $+\infty$ تنها نقطه انباشتگی دنباله است.

زیرا اگر $\{X_n\}$ واگرا به $+\infty$ باشد، هر زیر دنباله $\{X_n\}$ نیز به $+\infty$ واگرا است. بنابراین، $+\infty$ تنها نقطه انباشتگی دنباله $\{X_n\}$ می‌باشد.

نتیجه ۳: اگر دنباله $\{X_n\}$ واگرا به $-\infty$ باشد، آن‌گاه $-\infty$ تنها نقطه انباشتگی دنباله است.

(اثبات مشابه است.)

توضیحات:

۱ـ دنباله $\{X_n\}$ را با $X_n=(-1)^n$ درنظر می‌گیریم. زیر دنباله

$$\{X_1, X_3, \dots\} = \{-1, -1, \dots\}$$

از آن به ۱- همگرا می‌باشد. از این رو، ۱- یک نقطه انباشتگی دنباله $\{X_n\}$ است.

زیر دنباله $\{X_2, X_4, \dots\} = \{1, 1, \dots\}$ از آن به ۱+ همگرا می‌باشد. از این‌رو، ۱+ یک نقطه انباشتگی دنباله $\{X_n\}$ می‌باشد.

بنابراین ۱- و ۱ دو نقطه انباشتگی دنباله $\{(-1)^n\}$ می‌باشند.

نتیجه: مثال فوق نشان می‌دهد که یک دنباله می‌تواند بیشتر از یک نقطه انباشتگی داشته باشد.

۲ـ فرض می‌کنیم $X_n=\frac{1}{n}$. آن‌گاه، دنباله $\{X_n\}$ به‌صفر همگرا است و بنابراین، صفر تنها نقطه انباشتگی دنباله $\{X_n\}$ می‌باشد.

۳ـ فرض می‌کنیم $X_n=n$. آن‌گاه، دنباله $\{X_n\}$ به $+\infty$ واگرا است و بنابراین، هر زیر دنباله‌از آن‌نیز به $+\infty$ واگرا است. از این‌رو، $+\infty$ تنها نقطه انباشتگی دنباله $\{X_n\}$ می‌باشد.

۴ـ دنباله،

$$X_n = \begin{cases} n & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \\ -n & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. زیر دنباله $\{X_{2n-1}\}_1^\infty$ از آن به $+\infty$ واگرا است و زیر دنباله $\{X_{2n}\}_1^\infty$ به $-\infty$.

بنابراین دنباله $\{X_n\}$ دارای دو نقطه انباشتگی $+\infty$ و $-\infty$ است.

۳۶۰۱ : بخش سی و ششم

قضیه:

عدد حقیقی X یک نقطه حدی مجموعه A است اگر و فقط اگر دنباله‌ای از نقاط متمایز A بتوان یافت که همگرا به X باشد.

برهان لزوم :

فرض می‌کنیم $\{X_n\}$ یک دنباله از نقاط متمایز A باشد که به X همگرا می‌باشد. بنابراین، به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد طبیعی مانند m موجود است به طوری که:

$$X_n \in (X-\varepsilon \text{ و } X+\varepsilon) \qquad \text{به ازای هر } n \geq m \text{ ،}$$

این نشان می‌دهد که هر همسایگی X شامل بی نهایت نقطه از A است، و نتیجه می‌گیریم که X یک نقطه حدی A می‌باشد.

برهان کفایت :

فرض می‌کنیم X یک نقطه حدی A باشد. باید نشان دهیم که یک دنباله از نقاط متمایز A همگرا به X موجود است.

چون X یک نقطه حدی A است، به ازای هر عدد طبیعی n، همسایگی $I_n=(X-\frac{1}{n} \text{ و } X+\frac{1}{n})$ شامل بی‌نهایت نقطه از A می باشد.

X_1 را از A طوری انتخاب می‌کنیم که $X_1 \in (X-1 \text{ و } X+1) = I_1$ سپس، X_2 را از A طوری انتخاب می‌کنیم که $X_2 \neq X_1$ و $X_2 \in (X-\frac{1}{2} \text{ و } X+\frac{1}{2}) = I_2$ [این انتخاب ممکن است، زیرا I_2 بی‌نهایت نقطه از A را در بر دارد.] با ادامه این روش می‌توان X_k را از A طوری انتخاب می‌کنیم که

$$X_k \in I_k \quad \text{و} \quad X_k = X_i \quad \text{و} \quad 1 \leq i \leq k-1$$

به این ترتیب یک دنباله $\{X_n\}$ از نقاط متمایز A حاصل می‌شود به طوری که به ازای هر n، $X_n \in I_n$ حال فرض کنید m عدد طبیعی ثابتی باشد. اگر $n \geq m$، نامساویهای

$$X-\frac{1}{n} > X-\frac{1}{m} \quad \text{و} \quad X+\frac{1}{m} > X+\frac{1}{n}$$

برقرارند و ، بنابراین ، $(X-\frac{1}{n} \text{ و } X+\frac{1}{n}) < (X-\frac{1}{m} \text{ و } X+\frac{1}{m})$

یعنی ، به ازای هر $n \geq m$ ، $I_n \leq I_m$

از این رو ، به ازای هر $n \geq m$ ، عضویت X_n در I_n مستلزم عضویت X_n در I_m است. یعنی:

به ازای هر $n \geq m$ ، $X_n \in (X-\frac{1}{m} \text{ و } X+\frac{1}{m})$

لذا:

به ازای هر $n \geq m$ ، $|X_n - X| < \frac{1}{m}$

چون m دلخواه بود نتیجه می گیریم که

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X$$

و برهان کفایت تمام است.

در نتیجه به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض، جمل دنباله $\{X_{nk}\}$ از مرتبه‌ای به بعد به بازه $(X-\varepsilon \text{ و } X+\varepsilon)$ تعلق دارند.

۳۷۰۱ : بخش سی و هفتم

قضیه

عدد حقیقی X یک نقطه انباشتگی دنباله $\{X_n\}$ است اگر وفقط اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض، بازه $(X-\varepsilon \text{ و } X+\varepsilon)$ شامل بی‌نهایت جمله از $\{X_n\}$ باشد.

برهان لزوم :

فرض می‌کنیم X یک نقطه انباشتگی دنباله $\{X_n\}$ باشد. آن گاه زیر دنباله‌ای مانند $\{X_{nk}\}$ از $\{X_n\}$ موجود است که به X همگرا است.

در نتیجه به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض، جمل دنباله $\{X_{nk}\}$ از مرتبه‌ای به بعد به بازه $(X-\varepsilon \text{ و } X+\varepsilon)$ تعلق دارند.

برهان کفایت :

فرض کنید به ازای هر $\varepsilon > 0$ بازه $(X-\varepsilon \text{ و } X+\varepsilon)$ شامل بی‌نهایت جمله از دنباله $\{X_n\}$ ثابت می‌کنیم که X یک نقطه انباشتگی دنباله $\{X_n\}$ است. به عبارت دیگر

نشـان می‌دهیم که زیر دنباله‌ای مانند $\{X_{nk}\}$ موجود است که به X همگرا است. بنا به فرض، بـه ازای هـر عدد طبیعی n، بازه $I_n=(X-\frac{1}{n}$ و $X+\frac{1}{n})$ شامل بی‌نهایت جمله از دنباله $\{X_n\}$ است. X_{n_1} را از بـــازه $I_1=(X-1$ و $X+1)$ انتخـــاب می‌کنیم چـــون بـــازه $I_2=(X-\frac{1}{2}$ و $X+\frac{1}{2})$ نیـز شامل بی‌نهایت جمله از دنباله $\{X_n\}$ است، عددی طبیعی مانند n_1 موجود است که $n_2>n_1$ و $X_{n_2}\in I_2$

فرض کنید X_{nk} تعریف شده باشد. چون بازه $I_{k+1}=(X-\frac{1}{k+1}$ و $X+\frac{1}{k+1})$ شـامل بی نهایت جملـه از $\{X_n\}$ است، عـددی طبیعی ماننـد n_{k+1} موجود است به طوری که $n_{k+1}>n_k$ و $X_{nk+1}\in I_{k+1}$. بـا ادامه این فرایند. دنباله $\{X_{nk}\}$ را به دست می آوریم که یک زیر دنباله از دنباله $\{X_n\}$ است. حال فرض کنید k_0 عدد طبیعی ثابتی باشد. اگر $k\geq k_0$، نامساویهای

$$X-\frac{1}{k}>X-\frac{1}{k_0} \quad \text{و} \quad X+\frac{1}{k}<X+\frac{1}{k_0}$$

برقرارند و بنابراین،

$$(X-\frac{1}{k} \text{ و } X+\frac{1}{k})\subseteq(X-\frac{1}{k_0} \text{ و } X+\frac{1}{k_0})$$

یعنی،

$$I_n\subseteq I_{k_0} \qquad \text{به ازای هر } k\geq k_0 \text{ ،}$$

این به استناد تعریف زیر دنباله مذکور، ایجاب می کند که

$$X_{nk}\in I_k \qquad \text{به ازای هر } k>k_0 \text{ ،}$$

از این رو،

$$|X_{nk}-X|<\frac{1}{k_0} \qquad \text{به ازای هر } k>k_0 \text{ ،}$$

و نتیجه می‌گیریم که زیر دنباله $\{X_{nk}\}$ به X همگرا است و برهان کفایت تمام است.

نتیجه ۱: نقطه انباشتگی الزاما یک نقطه حدی نیست.

برهـان: دنبـالـه $\{X_n\}$ را بـا $X_n=(-1)^n$ در نظر بگیرید. زیر دنباله $\{X_{2n}\}$ از آن به ۱ همگرا است. بنابراین، $X=1$ یک نقطه انباشتگی دنباله $\{X_n\}$ است. ولی چنان که می‌دانیم،

دنباله $\{X_n\}$ همگرا به ۱ نیست. از این‌رو، $X=1$ نقطه حدی نیست.

نتیجه ۲: حد دنباله $\{X_n\}$ در صورت وجود، یک نقطه انباشتگی دنباله $\{X_n\}$ می‌باشد.

برهان: فرض می‌کنیم X حد دنباله $\{X_n\}$ باشد. بنابراین، $\{X_n\}$ به X همگرا است. از این رو، هر زیر دنباله از آن نیز به X همگرا است و، بنابراین، X یک نقطه انباشتگی $\{X_n\}$ می‌باشد.

۳۸۰۱ : بخش سی و هشتم

قضیه:

اگر $\{X_n\}$ کراندار باشد و l تنها نقطه انباشتگی دنباله $\{X_n\}$ باشد، آن گاه دنباله $\{X_n\}$ به l همگرا است.

برهان: فرض می‌کنیم $\{X_n\}$ کراندار باشد و l تنها نقطه انباشتگی دنباله $\{X_n\}$ باشد، اگر $\{X_n\}$ به l همگرا نباشد. حکم: «به ازای هر $\varepsilon>0$ عدد صحیح مثبتی مانند m موجود است به طوری که به ازای هر $n>m$ ، $X_n\in(l-\varepsilon \text{ و } l+\varepsilon)$» نقض می‌شود و، بنابراین، ε مثبتی وجود دارد به طوری که به ازای هر عدد طبیعی m عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $n>m$ ، $X_n\notin(l-\varepsilon \text{ و } l+\varepsilon)$. لذا، با انتخاب $m=1$ ، متوجه می‌شویم که عددی طبیعی مانند n_1 موجود است به طوری که $n_1>1$ و $X_{n_1}\notin(l-\varepsilon \text{ و } l+\varepsilon)$. سپس، با انتخاب $m=n_1$ ، متوجه می‌شویم که عددی مانند n_2 وجود دارد به طوری که $n_2>n_1$ و $X_{n_2}\notin(l-\varepsilon \text{ و } l+\varepsilon)$. با ادامه این فرایند، یک زیر دنباله مانند $\{X_{nk}\}$ به‌دست می‌آوریم به طوری که:

$$X_{nk}\notin(l-\varepsilon \text{ و } l+\varepsilon) \quad \text{، به ازای هر } k \qquad (1)$$

اما $\{X_n\}$ کراندار است و، بنابراین، $\{X_{nk}\}$ نیز کراندار می‌باشد. از این رو، به استناد قضیه بولتسانو ـ وایرشتراس، $\{X_{nk}\}$ زیر دنباله‌ای همگرا دارد. اگر هر زیر دنباله $\{X_{nk}\}$ به l همگرا باشد، دنباله $\{X_{nk}\}$ نیز الزاما به l همگرا خواهد بود، که با (۱) متناقض است.

از این رو، $\{X_{nk}\}$ زیر دنباله‌ای همگرا به l' دارد، که $l'\neq l$. در این صورت، به

استناد تعریف ، لازم می آید که l نیز یک نقطه انباشتگی دنباله $\{X_n\}$ باشد که با فرض قضیه متناقض است . لذا ، فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

۳۹۰۱ : بخش سی و نهم

قضیه:

دنباله $\{X_n\}$ به سمت $+\infty$ ($-\infty$) واگرا است اگر فقط و اگر $+\infty$ ($-\infty$) تنها نقطه انباشتگی $\{X_n\}$ باشد.

اثبات این قضیه را که مشابه اثبات قضیه قبلی است ، به متعلمین واگذار می کنیم.

۰۰۱ ٤ : بخش چهلم

قضیه:

هر دنباله حداقل یک نقطه انباشتگی دارد.

برهان : فرض می کنیم $\{X_n\}$ یک دنباله دلخواه باشد. چنان که می‌دانیم، دنباله $\{X_n\}$ یک زیردنباله یکنوامانند $\{X_{nk}\}$ دارد. بنابراین، $\{X_{nk}\}$ یاهمگراست یا واگرا (به $+\infty$ یا $-\infty$).
[زیرا یک دنباله یکنوا یا همگرا است یا واگرا .]

حالت اول : $\{X_{nk}\}$ همگرا به l است. بنابراین، l یک نقطه انباشتگی $\{X_n\}$ می باشد.

حالت دوم : $\{X_{nk}\}$ به $+\infty$ واگرا است. بنابراین، $+\infty$ یک نقطه انباشتگی $\{X_n\}$ است .

حالت سوم : $\{X_{nk}\}$ به $-\infty$ واگرا است. بنابراین، $-\infty$ یک نقطه انباشتگی $\{X_n\}$ است .

از سه حالت فوق نتیجه می شود که هر دنباله حداقل یک نقطه انباشتگی دارد.

٤۱۰۱ : بخش چهل و یکم

حد زبرین و حد زیرین یک دنباله

تعریف : فرض کنید $\{X_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد و فرض کنید E مجموعه

همه نقاط انباشتگی (شامل $+\infty$ و $-\infty$) دنباله $\{X_n\}$ باشد. مجموعه E ناتهی است (قضیه ۱.۴۰).

حد زبرین: کوچکترین کران بالای مجموعه E در دستگاه منبسط اعداد حقیقی را حد زبرین دنباله $\{X_n\}$ می‌نامند و با نماد $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Sup} X_n$ یا $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, X_n$ (یا به‌صورت ساده $\operatorname{Lim Sup} X_n$ یا $\overline{\operatorname{Lim}}\, X_n$) نمایش میدهند.

حد زیرین: بزرگترین کران پائین مجموعه E در دستگاه منبسط اعداد حقیقی را حد زیرین دنباله $\{X_n\}$ می‌نامند و با نماد $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Inf} X_n$ یا $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, X_n$ (یا به‌صورت ساده $\operatorname{Lim Inf} X_n$ یا $\underline{\operatorname{Lim}}\, X_n$) نمایش میدهند.

تبصره:

۱ـ واضح است که امکان دارد $\overline{\operatorname{Lim}}\, X_n$ یا $\underline{\operatorname{Lim}}\, X_n$ مساوی $+\infty$ یا $-\infty$ باشد.

۲ـ چون در دستگاه منبسط اعداد حقیقی هر مجموعه ناتهی دارای کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پائین است، هر دنباله، حد زبرین و حد زیرین دارد، چه همگرا باشد چه واگرا.

توضیحات:

۱ـ فرض می‌کنیم:

$$X_n = (-1)^n$$

چنان‌که قبلا نشان دادیم، این دنباله دارای دو نقطه انباشتگی ۱ و ۱- است، یعنی، $E=\{-1 \text{ و } 1\}$.

لذا $\overline{\operatorname{Lim}}\, X_n = 1$ و $\underline{\operatorname{Lim}}\, X_n = -1$

۲ـ فرض می‌کنیم:

$$X_n = \begin{cases} n & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ -n & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

آن‌گاه $E = \{-\infty \text{ و } +\infty\}$. بنابراین، $\overline{\operatorname{Lim}}\, X_n = +\infty$ و $\underline{\operatorname{Lim}}\, X_n = -\infty$.

۴۲۰۱ : بخش چهل و دوم

قضیه:

الف: برای هر دنباله $\{X_n\}$ داریم: $\underline{\operatorname{Lim}}\, X_n \le \overline{\operatorname{Lim}}\, X_n$

ب: دنباله $\{X_n\}$ به l همگرا است اگر و فقط اگر $\underline{\text{Lim}}\, X_n = \overline{\text{Lim}}\, X_n = l$

ج: دنباله $\{X_n\}$ به $+\infty$ ($-\infty$) واگرا است اگر و فقط اگر

$\underline{\text{Lim}}\, X_n = \overline{\text{Lim}}\, X_n = +\infty$ ($\underline{\text{Lim}}\, X_n = \overline{\text{Lim}}\, X_n = -\infty$ یا)

برهان:

(الف): فرض می کنیم E مجموعه نقاط انباشتگی دنباله $\{X_n\}$ باشد.

داریم: $\inf E \leq \sup E$. بنابراین، $\underline{\text{Lim}}\, X_n \leq \overline{\text{Lim}}\, X_n$

(ب): دنباله $\{X_n\}$ همگرا به l است فقط و فقط اگر که هر زیر دنباله از آن به l همگرا باشد.

از این رو، دنباله $\{X_n\}$ همگرا به l است اگر و فقط اگر $E=\{l\}$. بنابراین، دنباله $\{X_n\}$ همگرا به l است اگر و فقط اگر

$$\underline{\text{Lim}}\, X_n = \inf E = l = \sup E = \overline{\text{Lim}}\, X_n$$

(ج): دنباله $\{X_n\}$ واگرا به $+\infty$ است اگر و فقط اگر هر زیر دنباله از آن به $+\infty$ واگرا باشد.

از این رو، دنباله $\{X_n\}$ واگرا به $+\infty$ است اگر و فقط اگر $E=\{\infty\}$. بنابراین، دنباله $\{X_n\}$ واگرا به $+\infty$ است اگر و فقط اگر

$$\underline{\text{Lim}}\, X_n = \inf E = \infty = \sup E = \overline{\text{Lim}}\, X_n$$

۴۳۰۱ : بخش چهل و سوم

خواص حد زبرین

قضیه:

فرض کنید $\{X_n\}$ دنباله ای کراندار باشد. در این صورت $\overline{\text{Lim}}\, X_n = u$ فقط و فقط وقتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$ هر دو شرط زیر برقرار باشد:

(الف) عددی طبیعی مانند m موجود باشد به طوری که به ازای هر $n \geq m$، $X_n < u + \varepsilon$

(ب) به ازای بی نهایت n، $X_n > u - \varepsilon$

برهان این قضیه از حد این کتاب خارج است و حذف میشود.

۴۴۰۱ : بخش چهل و چهارم

خواص حد زیرین

قضیه :

فرض کنیم $\{X_n\}$ کراندار باشد. در این صورت $\underline{\text{Lim}}\, X_n = l$ فقط و فقط وقتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$ هر دو شرط زیر برقرار باشد:

(الف) عددی طبیعی مانند m موجود باشد به طوری که به ازای هر $n \geq m$ ، $X_n > l - \varepsilon$

(ب) به ازای بی نهایت n ، $X_n < l + \varepsilon$

برهان این قضیه از حد این کتاب خارج است و حذف میشود.

مثال ۱ : اگر $\{X_n\}$ یک دنباله کراندار باشد و، به ازای $n \in N$ ،

$$Y_n = \sup_{m \geq n} X_n = \sup\{X_n \text{ و } X_{n+1} \text{ و} \ldots\} \quad \text{و} \quad Z_n = \inf_{m \geq n} X_n = \inf\{X_n \text{ و } X_{n+1} \text{ و} \ldots\}$$

آن گاه دنباله های $\{Y_n\}$ و $\{Z_n\}$ کراندارند، $\{Y_n\}$ نزولی و $\{Z_n\}$ صعودی است، و حدود زیر موجودند:

$$\lim_{n \to \infty} Y_n = Y \qquad \text{و} \qquad \lim_{n \to \infty} Z_n = Z$$

بعلاوه

(الف) : $Y = \lim_{n \to \infty} \sup X_n = \inf\{Y_1 \text{ و } Y_2 \text{ و} \ldots\} = \inf_{n \geq 1} \{\sup_{m \geq n} (X_m)\}$

(ب) : $Z = \lim_{n \to \infty} \inf X_n = \sup\{Z_1 \text{ و } Z_2 \text{ و} \ldots\} = \sup_{n \geq 1} \{\inf_{m \geq n} (X_m)\}$

برهان : فرض می کنیم ε یک عدد مثبت دلخواه باشد. چون $Y = \inf Y_n$ ، یک عدد طبیعی مانند m موجود است به طوری که $Y_m < Y + \varepsilon$

همچنین چون دنباله $\{Y_n\}$ نزولی است ، به ازای هر $n \geq m$ ، $Y_n < Y_m < Y + \varepsilon$ این نشان میدهد که شرط (الف) قضیه ۴۳.۱ برقرار است.

حال فرض کنید نامساوی $Y_n > Y - \varepsilon$ به ازای تعدادی متناهی n ، مثلا P_1 ، P_2 ،...، P_r برقرار باشد. و فرض کنید $P = \max_{1 \leq i \leq r} P_i = \max\{P_1 \text{ و } P_2 \text{ و} \ldots \text{ و } P_r\}$

در این صورت، به ازای هر $n>P$ ، داریم: $Y_n<Y-\varepsilon$ که مستلزم $\lim Y_n<Y-\varepsilon$ و نادرست است. از این رو، نامساوی $Y_n>Y-\varepsilon$ به ازای تعدادی نامتناهی n برقرار است. لذا شرط دوم قضیه ۴۳.۱ نیز برقرار است. و حکم (الف) ثابت است.

اثبات حکم (ب) مشابه است و به متعلمین واگذار می‌شود.

مثال ۲ : نشان دهید که به ازای دنباله های کراندار $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ داریم

$$\underline{\lim}X_n+\underline{\lim}Y_n<\underline{\lim}(X_n+Y_n)<\overline{\lim}(X_n+Y_n)<\overline{\lim}X_n+\overline{\lim}Y_n$$

برهان : اگر فرض کنیم

$$a_n=\inf_{m\geq n}X_m \qquad \text{و} \qquad a'_n=\sup_{m\geq n}X_m$$

$$b_n=\inf_{m\geq n}Y_n \qquad \text{و} \qquad b'_n=\sup_{m\geq n}Y_m$$

$$n=۱ \text{ و } ۲ \text{ و } \ldots$$

آن گاه، به ازای هر $m\geq n$ ،

$$X_m\geq a_n \qquad \text{و} \qquad Y_m\geq b_n$$

$$X_m\leq a'_n \qquad \text{و} \qquad Y_m\leq b'_n$$

و بنابراین،

$$\underline{\lim}(X_n+Y_n)=\lim_{n\to\infty}\inf_{m\geq n}(X_m+Y_m)$$

$$\geq\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$=\underline{\lim}_{n\to\infty}X_n+\underline{\lim}_{n\to\infty}Y_n$$

و

$$\overline{\lim}(X_n+Y_n)=\lim_{n\to\infty}\sup_{m\geq n}(X_m+Y_m)$$

$$\leq\lim_{n\to\infty}(a'_n+b'_n)=\lim_{n\to\infty}a'_n+\lim_{n\to\infty}b'_n$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} X_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} Y_n$$

همچنین بدیهی است که: $\overline{\lim_{n\to\infty}} (X_n+Y_n) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} (X_n+Y_n)$

این اثبات را کامل می کند.

تبصره: فرض کنید که، به ازای هر $n \in N$ ، $X_n=(-1)^n$ و $Y_n=(-1)^{n+1}$ ، آن گاه

$$\text{Lim Sup } X_n=1 \quad \text{و} \quad \text{Lim Sup } Y_n=1$$

و $\text{Lim Sup } (X_n+Y_n) = 0$

بنابراین، $\text{Lim Sup } X_n + \text{Lim Sup } Y_n \neq \text{Lim Sup}(X_n+Y_n)$

یا $\overline{\lim} X_n + \overline{\lim} Y_n \neq \overline{\lim}(X_n+Y_n)$

این نشان می‌دهد که نامساویهای اکید در قضیه بالا تنها در شرایط معینی برقرار است.

مثال ۳: اگر $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ دنباله هایی کراندار باشند به‌طوریکه

$X_n \le Y_n$ به ازای هر n ، (*)

آن گاه $\underline{\lim} X_n < \underline{\lim} Y_n$ و $\overline{\lim} X_n < \overline{\lim} Y_n$

برهان: فرض (*) ایجاد می کند که

به ازای هر m ، $\inf\{X_m \text{ و } X_{m+1} \text{ و} \dots\} \le \inf\{Y_m \text{ و } Y_{m+1} \text{ و} \dots\}$

از این رو، $\sup_{n\ge1}\{\inf_{m\ge n}(X_m)\} < \sup_{n\ge1}\{\inf_{m\ge n}(Y_m)\}$

یا $\underline{\lim} X_n \le \underline{\lim} Y_n$

اثبات نامساوی دوم بر عهده متعلم است.

مثال ٤: Lim sup و Lim inf هریک از دنباله های زیر را پیدا کنید:

الف- $\{1 \text{ و } 3 \text{ و } 5 \text{ و } 1 \text{ و } 3 \text{ و } 5 \text{ و} \dots\}$

ب- $\{X_n\}$ با، $X_n=(-1)^n(1-\frac{1}{n})$

ج- $\{X_n\}$ با، $X_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$

د- $\{X_n\}$ با، $X_n=(-2)^n(1+\frac{1}{n})$

برهان:

(الف): زیر دنباله $\{X_{3n}\}$ همگرا به ۵ است و زیر دنباله $\{X_{3n-2}\}$ همگرا به ۱.

چون همواره $1 \le X_n \le 5$. هر نقطه انباشتگی دنباله مفروض بین ۱ و ۵ است از این‌رو،

$$\underline{\text{Lim}}\ X_n=1 \quad \text{و} \quad \overline{\text{Lim}}\ X_n=5$$

(ب): زیر دنباله $\{X_{2n}\}$ را در نظر می‌گیریم.

داریم: $X_{2n}=(-1)^{2n}(1-\frac{1}{2n})=1-\frac{1}{2n}$

وقتی $n\to\infty$ ، X_{2n} به ۱ میل می‌کند.

زیر دنباله $\{X_{2n-1}\}$ را در نظر می‌گیریم.

داریم: $X_{2n-1}=(-1)^{2n-1}(1-\frac{1}{2n-1})=-1+\frac{1}{2n+1}$

وقتی $n\to\infty$ ، X_{2n-1} به ۱- میل می‌کند.

بنابراین، ۱- و ۱ حدود زیر دنباله‌ای هستند. همچنین

به ازای هر n $|X_n|=|(-1)^n(1-\frac{1}{n})|=1-\frac{1}{n}<1$

در نتیجه، تمام حدود زیر دنباله‌ای بین ۱- و ۱ قرار دارند. لذا،

$$\underline{\text{Lim}}\ X_n=-1 \quad \text{و} \quad \overline{\text{Lim}}\ X_n=+1$$

(ج): در این جا $X_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}=(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})$

از این رو،

$$\text{Lim}\, X_n=\text{Lim}((1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n}))$$

$$=\text{Lim}(1+\frac{1}{n})^n\,.\,\text{Lim}(1+\frac{1}{n})$$

$$=e$$

بنابراین، e تنها نقطه انباشتگی دنباله است و

$$\underline{\text{Lim}}\ X_n=e=\overline{\text{Lim}}\ X_n$$

(د) :در این جا

$$X_n = \begin{cases} (۲)^n(۱+\frac{۱}{n}) & \text{وقتی } n \text{ زوج است ،} \\ -(۲)^n(۱+\frac{۱}{n}) & \text{وقتی } n \text{ فرد است ،} \end{cases}$$

و

$$\lim_{n\to\alpha}(۲)^n(۱+\frac{۱}{n}) = \lim_{n\to\infty}(۲)^n \lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n}) = \infty$$

در نتیجه $\{X_۱ و X_۳ و X_۵ و ...\}$ واگرا به $+\infty$ و $\{X_۲ و X_۴ و X_۶ و ...\}$ واگرا به $-\infty$ است.

از این رو ،

$$\overline{\lim}\ X_n = +\infty$$

$$\underline{\lim}\ X_n = -\infty$$

مثال ۵ :

کدام یک از عبارات زیر درست است و کدام یک نادرست ؟ برای جواب خود دلیل بیاورید.

الف- اگر حد زبرین دنباله $\{X_n\}$ برابر M باشد آن گاه دنباله $\{X_n\}$ زیر دنباله‌ای دارد که حد زبرین آن از M بزرگتر است.

ب- اگر $\{X_n\}$ یک دنباله کراندار باشد و $\overline{\lim}\ X_n = M$ ، آن گاه $\{X_n\}$ زیر دنباله‌ای دارد که به M همگرا می‌باشد.

ج- اگر دنباله $\{X_n\}$ نوسانی نامتناهی باشد، آن گاه

$$\underline{\lim}\ X_n = -\infty \quad و \quad \overline{\lim}\ X_n = +\infty$$

د- یک دنباله واگرا از اعداد گویا وجود دارد که یک دنباله کوشی است .

هـ- یک دنباله کوشی از اعداد گویا وجود دارد که نوسانی است.

و- یک دنباله کوشی از اعداد اصم موجود است که نوسانی نامتناهی است.

ز- اگر E مجموعه حدود زیر دنباله ای دنباله $\{X_n\}$ یک مجموعه تک عضوی مانند $\{l\}$ باشد، آن گاه $X_n \to l$

حل :

(الف): نادرست است

اگر حد زبرین دنباله $\{X_n\}$ برابر M باشد، حد زبرین هیچ زیر دنباله‌ای از $\{X_n\}$

بزرگتر از M نتواند بود. زیرا، فرض کنیم یک زیر دنباله مانند $\{X_{nk}\}$ موجود باشد با حد زبرین m_1 که $m_1 > M$، آن‌گاه m_1 یک حد زیر دنباله‌ای $\{X_{nk}\}$ است، چون هر زیر دنباله از $\{X_{nk}\}$ یک زیر دنباله $\{X_n\}$ نیز هست، m_1 یک حد زیر دنباله‌ای $\{X_n\}$ خواهد بود که ممکن نیست.

(ب): درست است.

اگر $\overline{\text{Lim}}\, X_n = M$ و E مجموعه حد زیردنباله‌ای $\{X_n\}$ باشد، آن‌گاه $M = \text{Sup}\, E$

(ج): نادرست است.

دنباله

$$X_n = n \quad \text{اگر } n \text{ زوج باشد،}$$
$$= -1 \quad \text{اگر } n \text{ فرد باشد،}$$

را در نظر می‌گیریم. زیر دنباله $\{X_{2n-1}\}$ از آن همگرا به -1 است و زیر دنباله $\{X_{2n}\}$ واگرا به ∞. از این رو، $E = \{-1 \text{ و } \infty\}$. و ملاحظه می‌کنیم که

اگر دنباله

$$\underline{\text{Lim}}\, X_n = -1 \neq -\infty$$

$$X_n = -n \quad \text{اگر } n \text{ فرد باشد،}$$
$$= \frac{1}{n} \quad \text{اگر } n \text{ زوج باشد،}$$

را در نظر بگیریم، دیده میشود که $E = \{0 \text{ و } -\infty\}$ و $\overline{\text{Lim}}\, X_n = 0 \neq \infty$.

(د): نادرست است.

زیرا هر دنباله کوشی به یک عدد حقیقی همگرا است، یعنی هیچ دنباله کوشی واگرا نیست.

(ه): نادرست است.

(و): نادرست است.

زیرا هر دنباله کوشی به یک عدد حقیقی همگرا می‌باشد.

(ز): درست است.

اگر $E = \{1\}$، هر زیر دنباله $\{X_n\}$ به 1 همگرا است و، بنابراین، $X_n \to 1$.

مثال ٦.: فرض کنید $\{X_n\}$ یک دنباله کراندار باشد. نشان دهید که

الف- $\overline{\text{Lim}}\ (-X_n) = -\ \underline{\text{Lim}}(X_n)$

ب- $\underline{\text{Lim}}\ (-X_n) = -\ \overline{\text{Lim}}(X_n)$

ج- $\overline{\text{Lim}}\ (\lambda X_n) = \lambda\ \overline{\text{Lim}}\ (X_n)$ ، $\lambda \geq 0$

د- $\underline{\text{Lim}}\ (\lambda X_n) = \lambda\ \underline{\text{Lim}}\ (X_n)$ ، $\lambda \geq 0$

برهان: اگر $\{X_n\}$ کراندار باشد آن گاه $\{-X_n\}$ و $\{\lambda X_n\}$ نیز کراندارند. در این صورت

(الف) :

$$\overline{\text{Lim}}\ (-X_n) = \inf_{n\geq 1}\{\sup\{-X_m \text{ و } -X_{m+1} \text{ و } \dots\}\}$$

$$= \inf_{n\geq 1}\{-\inf\{X_m \text{ و } X_{m+1} \text{ و } \dots\}\}$$

$$= -\sup_{n\geq 1}\{\inf\{X_m \text{ و } X_{m+1} \text{ و } \dots\}\} = -\ \underline{\text{Lim}}\ (X_n)$$

(ب): برهان (ب) مشابه برهان (الف) و برعهده متعلم است.

(ج) :

$$\overline{\text{Lim}}\ (\lambda X_n) = \inf_{n\geq 1}\{\sup\{\lambda X_m \text{ و } \lambda X_{m+1} \text{ و } \dots\}\}$$

$$= \inf_{n\geq 1}\{\lambda \sup\{X_m \text{ و } X_{m+1} \text{ و } \dots\}\}$$

$$= \lambda \inf_{n\geq 1}\{\sup\{X_m \text{ و } X_{m+1} \text{ و } \dots\}\} = \lambda\ \overline{\text{Lim}}\ (X_n)$$

(د): برهان (د) مشابه برهان (ج) و برعهده متعلم است.

٤٥٠١ : بخش چهل و پنجم

خاصیت بارهای تودرتو

قضیه: اگر فرض کنیم $\{I_n = [a_n \text{ و } b_n]\}$ یک دنباله از بازه‌های بسته باشد به طوری که

(الف) به ازای هر عدد طبیعی n ، $I_{n+1} \subset I_n$

(ب) $\lim_{n\to\infty} l(I_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

آن گاه یک عدد منحصر به فرد مانند X موجود است به طوری که به ازای هر n ، $X \in I_n$.

(در این جا، $l(I_n)$ طول بازه I_n می‌باشد.)

توضیح : شرط (الف) نتیجه می‌دهد که هر بازه از دنباله فوق شامل بازه‌های بعدی است، یعنی، دنباله فوق نزولی است $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \dots$

شرط (ب) بدین معنی است که طول بازه‌ها به صفر میل می‌کند

$$\overline{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4} \; X \; \overline{b_4 \quad b_3 \quad b_2 \quad b_1}$$

و قضیه می گوید که یک نقطه موجود است که به تمامی بازه‌ها تعلق دارد. چنین نقطه‌ای منحصر به فرد است

برهان : به استناد شرط (الف)،

همواره $[a_{n+1} \text{ و } b_{n+1}] \subset [a_n \text{ و } b_n]$

از این رو ، به ازای هر n ، $a_n < a_{n+1}$

به ازای هر n ، $b_{n+1} < b_n$

لذا $\{a_n\}$ صعودی و دنباله $\{b_n\}$ نزولی است .

مجددا به استناد شرط (الف)،

به ازای هر n ، $I_n \subset I_1$

از این رو ، به ازای هر n ، $a_n \le b_1$

به ازای هر n ، $a_1 \le b_n$

یعنی $\{a_n\}$ از بالا به b_1 کراندار است و دنباله $\{b_n\}$ از پائین به a_1 کراندار است .

در نتیجه ، دنباله های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ همگرایند. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} a_n = X_1$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = X_2$. از تساوی $b_n = (b_n - a_n) + a_n$ ، که به ازای هر n برقرار است ، و شرط (ب) نتیجه میگیریم که $X_2 = X_1$

اگر مقدار مشترک X_1 و X_2 را به X نشان دهیم، ملاحظه می‌کنیم که اولا X حد دنباله صعودی

$\{a_n\}$ است و ، از این رو ،

$a_n \leq X$ به ازای هر n ، (۱)

ثانیا X حد دنباله نزولی $\{b_n\}$ است و ، بنابراین ،

$X \leq b_n$ به ازای هر n ، (۲)

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که به ازای هر n ، $a_n \leq X \leq b_n$

و برهان وجود X تمام است .

حال ثابت می‌کنیم که X منحصر به فرد است .

فرض می‌کنیم که X و Y دو عدد حقیقی متمایز باشند به طوری که ،

به ازای هر n ، $X \in [a_n \text{ و } b_n]$ و $Y \in [a_n \text{ و } b_n]$

بنابراین ،

به ازای هر n ، $|b_n - a_n| > |X - Y|$

و اگر فرض کنیم $\varepsilon = |X - Y|$ خواهیم داشت ،

(۳) به ازای هر n ، $|b_n - a_n| \geq \varepsilon$

اما به استناد (ب) ، $\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$ و ، بنابراین ، به ازای $\varepsilon = |X - Y|$ یک عدد صحیح مانند m موجود است به طوری که :

(٤) به ازای هر $n \geq m$ ، $|b_n - a_n| = |(b_n - a_n) - 0| < \varepsilon$

اما (۳) و (٤) با یکدیگر متناقضند . از این رو X تنها عدد حقیقی است که به همه بازه‌ها تعلق دارد.

تبصره :

۱ـ این قضیه به قضیه اشتراک کانتور نیز معروف است

۲ـ خاصیت بازه‌های تودرتو در R بااصل موضوع کمال هم ارز است.

فصل دوم:

سری‌های نامتناهی

۲-۱: بخش اول

تعریف سری نامتناهی : اگر $\{a_n\}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد، حاصل جمع $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ را یک سری نامتناهی می‌نامند و با $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یا $\sum a_n$ نمایش می‌دهند a_n را جمله nام سری فوق می نامند.

مجموع جزئی : مجموع n جمله اول یک سری را مجموع جزئی nام می نامند وبا σ_n نمایش می‌دهند. یعنی، $\sigma_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ را مجموع جزئی nام سری $\sum a_n$ می نامند. بنابراین، مجموعهای جزئی $\sigma_1 = a_1$ ، $\sigma_2 = a_1 + a_2$ ، $\sigma_3 = a_1 + a_2 + a_3$ ، ... ، به ترتیب اولین، دومین، سومین، ... ، مجموع جزئی و دنباله $\{\sigma_n\}$ را دنباله مجموعهای جزئی سری $\sum a_n$ می نامند.

تبصره ۱: مجموع جزئی nام را با S_n نیز نمایش می‌دهند.

تبصره ۲:

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$
$$= [(a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1}) + (a_m + a_{m+1} + \dots + a_n)] - [a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1}]$$
$$= \sigma_n - \sigma_{m-1}$$

۲.۲: بخش دوم

همگرائی ، واگرائی ، و نوسان یک سری نامتناهی

تعریف : سری $\sum a_n$ را همگرا یا واگرا ویا نوسانی نامند اگر دنباله مجموعهای جزئی $\{\sigma_n\}$ همگرا یا واگرا و یا نوسانی باشد.

۱. سری همگرا: سری $\sum a_n$ را همگرا نامیم اگر دنباله مجموعهای جزئی $\{\sigma_n\}$ به یک عدد حقیقی مانند σ همگراباشد. آن گاه σ را مجموع سری $\sum a_n$ نامیده و می‌نویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sigma$$

۲. سری واگرا

سری $\sum a_n$ را واگرا به ∞ می‌نامیم و می‌نویسیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ در صورتی که دنباله $\{\sigma_n\}$ واگرا به ∞ باشد.

سری Σa_n را واگرا به $-\infty$ می نامیم و می‌نویسیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$ در صورتی که دنباله $\{\sigma_n\}$ واگرا به $-\infty$ باشد.

۳. سری نوسانی

فرض کنید سری Σa_n نه همگرا باشد، نه واگرا به ∞ و نه واگرا به $-\infty$. در این صورت، سری Σa_n را نوسانی متناهی نامیم اگر دنباله $\{\sigma_n\}$ کراندار باشد و آن را نوسانی نامتناهی نامیم اگر دنباله $\{\sigma_n\}$ بی کران باشد.

۴. سری همگرای مطلق

سری Σa_n را همگرای مطلق نامند اگر سری $\Sigma |a_n|$ همگرا باشد.

۵. سری همگرای مشروط

سری Σa_n را همگرای مشروط می نامند اگر Σa_n همگرا باشد ولی $\Sigma |a_n|$ همگرا نباشد. یعنی سری فوق همگرا باشد اما نه به طور مطلق.

۶. سری ناهمگرا

یک سری را که واگرا و یا نوسانی است، یک سری ناهمگرا نامند.

تبصره : باید توجه داشت که رفتار سری نامتناهی Σa_n بستگی به رفتار دنباله مجموعهای جزئی $\{\sigma_n\}$ این سری دارد.

مثال ۱: نشان دهید که سری $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots$ به مجموع ۲ همگرا است.

حل : σ_n مجموع n جمله اول یک تصاعد هندسی با جمله اول ۱ و قدر نسبت $\frac{1}{2}$ است . بنابراین ،

$$\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1[1 - (\frac{1}{2})^n]}{1 - \frac{1}{2}} = 2(1 - \frac{1}{2^n})$$

از این رو:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} 2(1 - \frac{1}{2^n}) = 2(1 - 0) = 2$$

$\left[\text{زیرا: } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0\right]$

یعنی، $\{Sn\}$ به ۲ همگرا می باشد.

در نتیجه ، سری داده شده به مجموع ۲ همگرا می باشد.

مثال ۲ : نشان دهید که : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

حل : ملاحظه می کنیم که :

به ازای هر n، $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

از این رو ، $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

$$= (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) = 1-\frac{1}{n+1}$$

لذا، $\lim_{n\to\infty} S_n = 1 - 0 = 1$

یعنی ، $\{Sn\}$ همگرا به ۱ است.بنابراین ، سری فوق به مجموع ۱ همگرااست.

بخش سوم :

۳.۲ : قضیه: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آن گاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

برهان : فرض می کنیم $\{Sn\}$ دنباله مجموعهای جزئی سری Σa_n باشد. فرض کنید سری Σa_n مثلا به عدد S همگرا باشد. آن گاه دنباله های $\{Sn\}$ و $\{S_{n-1}\}$ نیز به S همگرایند. (دنباله $\{S_{n-1}\}$ یک زیر دنباله از دنباله $\{Sn\}$ است .)

بنابراین ، دنباله $\{S_n - S_{n-1}\}$ به صفر همگرا می باشد. چون $a_n = S_n - S_{n-1}$, دنباله $\{a_n\}$ به صفر همگرا باشد و برهان تمام است.

تبصره : عکس قضیه بالا صادق نیست. یعنی، اگر $\{a_n\}$ به صفر همگراباشد. Σa_n الزاما همگرا نخواهد بود.

به عنوان مثال ، سری Σa_n را با $a_n = \frac{1}{n}$ در نظر می گیریم. واضح است که $\{a_n\}$ به سمت صفر همگرا می‌باشد. ولی، ثابت خواهیم کرد که $\{Sn\}$ یک دنباله کوشی نیست و نمی تواند همگرا باشد.

ملاحظه می کنیم که :

$$|\sigma_{2n} - \sigma_n| = |(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}) - (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n})|$$

$$= |\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}|$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

به ازای هر n ،

$$> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}$$

یا به ازای هر n ،

$$|\sigma_{2n} - \sigma_n| > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

بنابراین، به ازای $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ، هیچ عدد طبیعی مانند P موجود نیست به طوری که

به ازای هر $m, n \geq P$ ، $|\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon$

در نتیجه ، $\{\sigma_n\}$ یک دنباله کوشی نمی باشد و همگرا نیست. یعنی، سری Σa_n همگرا نمی باشد.

نتیجه : اگر $\{a_n\}$ به صفر میل نکند، سری Σa_n نمی تواند همگرا باشد

زیرا اگر فرض کنیم Σa_n همگرا باشد آن گاه ، به استناد قضیه ۲-۳ ، $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

که با فرض متناقض است . در نتیجه ، سری Σa_n همگرا نمی‌باشد.

به عنوان مثال ، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$ را در نظر می گیریم. این سری نمی‌تواند همگرا باشد، زیرا،

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \cos \frac{1}{n} = \cos 0 = 1 \neq 0$$

۴.۲: بخش چهارم

قضیه : اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ،به ترتیب ، همگرا به σ و T باشند و λ , μ دو عدد حقیقی باشند، آن گاه $\Sigma(\lambda a_n + \mu b_n)$ به $\lambda\sigma + \mu T$ همگرا می باشد.

برهان : فرض می کنیم $\{\sigma_n\}$ و $\{T_n\}$ ، به ترتیب ، دنباله های مجموعهای جزئی Σa_n و Σb_n باشند. آن گاه $\{\lambda\sigma_n + \mu T_n\}$ دنباله مجموعهای جزئی

سری $\Sigma(\lambda a_n + \mu b_n)$ خواهد بود چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به σ همگرا می‌باشد، $\sigma_n \longrightarrow \sigma$ و $\lambda\sigma_n \longrightarrow \lambda\sigma$ به طور مشابه، $\mu T_n \longrightarrow \mu T$

بنابراین، $\lambda\sigma_n + \mu T_n \longrightarrow \lambda\sigma + \mu T$، و نتیجه می گیریم که: $\sum_{n=1}^{\infty}\{\lambda a_n + \mu b_n\}$ به $\lambda\sigma + \mu T$ همگرا می باشد.

۲-۵: بخش پنجم

قضیه : سریهای $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$، مفروضند. اگر یک عدد طبیعی مانند m و یک عدد صحیح نامنفی مانند p موجود باشند به طوری که به ازای هر $n \geq m$ ، $b_n = a_{n+p}$

آن گاه رفتار دو سری یکسان است .

حکم بالا را به به این صورت نیز بیان می کنند که :

(رفتار یک سری با حذف، افزایش، یا تغییر تعدادی متناهی جمله عوض نخواهد شد)

برهان : اگر $\{\sigma_n\}$ و $\{T_n\}$ دنباله‌های مجموعهای جزئی سریهای Σa_n Σb_n باشند، فرض قضیه ایجاب می کند که:

$$\begin{aligned} T_n &= (b_1 + b_2 + \ldots + b_m) + b_{m+1} + \ldots + b_n \\ &= T_m + a_{p+m+1} + a_{p+m+2} + \ldots + a_{n+p} \\ &= T_m + \sigma_{n+p} - \sigma_{m+p} \\ &= c + \sigma_{n+p} \qquad \text{به ازای هر } n > m \text{ ،} \end{aligned}$$

زیرا، $c = T_m + \sigma_{m+p}$ مستقل از n است

بنابراین، دنباله های مجموعهای جزئی $\{T_n\}$، $\{\sigma_n\}$ دارای رفتار یکسان می‌باشند. ازاین رو، رفتار دو سری Σa_n و Σb_n نیز یکسان است.

۲.۶: بخش ششم

آزمون سری هندسی: $1 + r + r^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$

فرض می کنیم $\{\sigma_n\}$ دنبالهٔ مجموعهای جزئی سری $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ یا $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ ، آن گاه

$$\sigma_n = 1+r+r^2+\ldots+r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

یا

$$\sigma_n = \frac{1}{1-r} - \frac{1}{1-r}\cdot r^n \text{ ، } r\neq 1 \text{ و } n\in N \qquad (1)$$

حالت اول : $|r|<1$ در این حالت:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \frac{1}{1-r} - \frac{1}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^n$$

$$= \frac{1}{1-r} - \frac{1}{1-r}\times 0 = \frac{1}{1-r}$$

و نتیجه می گیریم که سری $\sum_{n}^{\infty} r^n$ همگرا به $\frac{1}{1-r}$ است.

حالت دوم : $r>1$. در این حالت،

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$$

بنابراین به استناد (۱)

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = +\infty$$

لذا، سری $\sum_{n}^{\infty} r^n$ به $+\infty$ واگرا می باشد.

حالت سوم : $r<-1$ در این حالت، دنباله $\{r^n\}$ نوسانی نامتناهی است، زیرا دنباله $\{r^{2n}\}$ واگرا به ∞ و دنباله $\{r^{2n-1}\}$ واگرا به $-\infty$ است.

بنابراین، از (۱) نتیجه می گیریم که دنباله $\{\sigma_n\}$ نوسانی نامتناهی است. لذا ،در این حالت ، سری هندسی نوسانی نامتناهی است.

حالت چهارم : $r=1$. در این حالت،

$$\sigma_n = 1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}$$

$$= 1+1+1+\cdots+1 = n$$

از این رو ،

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \infty$$

در نتیجه، سری $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ به $+\infty$ واگرا می باشد.

حالت پنجم : $r=-1$. در این حالت،

$$\sigma_n = 1+r+r^2+\dots+r^{n-1} = 1-1+1-1+\dots+(-1)^{n-1}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد ،} \\ 1 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \end{cases}$$

از این رو ، دنباله $\{\sigma_{2n}\}$ همگرا به صفر است و دنباله $\{\sigma_{2n-1}\}$ همگرا به $+1$. چون $\{\sigma_{2n}\}$ و $\{\sigma_{2n-1}\}$ دو زیر دنباله $\{\sigma_n\}$ می باشند که به دو حد مختلف همگرایند ، دنباله $\{\sigma_n\}$ همگرا نمی - باشد. و چون دنباله $\{\sigma_n\}$ کراندار است ولی همگرا نیست، نوسانی متناهی است. لذا در این حالت، سری هندسی نوسانی متناهی است.

توجه : به دانشجویان توصیه می‌شود که این نتایج را به خاطر بسپارند.

۷.۲ : بخش هفتم

قضیه: اگر سری $\sum a_n$ همگرا به σ باشد و $\{n_k\}$ یک دنباله اکیدا صعودی از اعداد طبیعی باشد، آن گاه سری $(a_1+a_2+\dots+a_{n_1}) + (a_{n_1+1}+\dots+a_{n_2}) + \dots$ نیز همگرا به σ است.

این حکم را به این صورت نیز بیان می کنند :

(درج پرانتز در یک سری همگرا، هیچ تاثیری بر همگرائی آن ندارد)

برهان : فرض می کنیم $\{\sigma_n\}$ دنباله مجموعهای جزئی سری $\sum a_n$ باشد و $\{T_n\}$ دنباله مجموعهای جزئی سری حاصل از درج پرانتز به صورت بالا باشد. ملاحظه می کنیم که:

$$T_k = (a_1+\dots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+a_{n_1+2}+\dots+a_{n_2})+\dots+(a_{n_{k-1}}+\dots+a_{n_k}) = \sigma_{n_k}$$

بنابراین ، $\{T_k\}$ یک زیر دنباله از $\{\sigma_n\}$ است. اما $\{\sigma_n\}$ همگرا به σ است .[زیرا، سری $\sum a_n$ همگرا به σ است.]

در نتیجه دنباله $\{T_k\}$ نیز همگرا به σ است و برهان تمام است.

تبصره : باید توجه داشت که حذف پرانتزها عموما مجاز نیست.

به عنوان مثال ، سری $(1-1)+(1-1)+\dots$ همگرا به صفر است، ولی سری حاصل از حذف

پرانتزها که عبارتست از: ... + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ همگرا نمی‌باشد.(قضیه ۶.۲، حالت پنجم)

۸.۲: بخش هشتم

معیار کوشی

قضیه : سری Σa_n همگراست اگر و فقط اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد طبیعی مانند P موجود باشد به طوری که به ازای هر m,n که $n>m\geq p$ ،

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon$$

برهان : سری Σa_n همگراست اگر و فقط اگر دنباله مجموعهای جزئی آن،یعنی $\{\sigma_n\}$ ، همگرا باشد. اما به استناد معیار کوشی برای همگرائی دنبالها (بخش ۱ - ۳۴) ، دنباله $\{\sigma_n\}$ همگراست اگر وفقط اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد طبیعی مانند P موجود باشد به طوری که به ازای هر n,m که $n>m\geq p$, $|\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon$.

برای اتمام برهان، کافی است که ملاحظه کنیم که :

$$|\sigma_n - \sigma_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n|$$

مثال ۱: نشان دهید که سری همساز $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ واگرا به ∞ است

برهان: داریم: (۱)

$$\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

با تبدیل n به ۲n، خواهیم داشت:

$$\sigma_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \qquad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می کیریم که:

$$\sigma_{2n} - \sigma_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$|\sigma_{2n} - \sigma_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

به ازای هر n ,

$$\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

به ازای $\varepsilon = \frac{1}{2}$، هیچ عدد طبیعی مانند P موجود نیست به طوری که:

به ازای هر n,m که $n>m\geq p$ ، $|\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon$

(۳) بنابراین ، $\{\sigma_n\}$ یک دنباله کوشی نیست و در نتیجه همگرا نمی باشد.

همچنین :

$$\sigma_{n+1} - \sigma_n = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1} > 0$$

یعنی به ازای هر n، $\sigma_{n+1} > \sigma_n$

(۴) بنابراین $\{\sigma_n\}$ صعودی است.

از (۳) و (۴) نتیجه می گیریم که که دنباله $\{\sigma_n\}$ و در نتیجه سری مفروض واگرا به ∞ است.

۹.۲: بخش نهم

قضیه: هر سری همگرای مطلق، همگراست.

برهان : فرض می کنیم سری Σa_n همگرای مطلق باشد. از این رو بنا به تعریف سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگراست. بنابراین به استناد معیار کوشی، به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد طبیعی مانند P موجود است به طوری که به ازای هر m ، n که $n>m\geq p$ ،

$$\Big| \, |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \dots + |a_n| \, \Big| =$$

$$|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + |a_{m+3}| + \dots + |a_n| < \in \qquad (1)$$

باید ثابت کنیم سری Σa_n همگرا است. کافی است ملاحظه کنیم که:

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| \leq |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \dots + |a_n|$$

از این رو به استناد (۱)، نامساوی $|a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon$

به ازای هر m , n که $n>m\geq p$ برقرار است. لذا به استناد معیار کوشی، سری Σa_n همگراست.

تبصره: عکس قضیه بالا صحیح نمی باشد یعنی یک سری همگرا الزاما همگرای مطلق نمی باشد.

به عنوان مثال ، چنان که خواهیم دید سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

همگراست.(قسمت الف مثال ۱)

اما سری $\Sigma \frac{1}{n}$، چنان که قبلا ثابت شد واگراست.

۱۰.۲: بخش دهم

قضیه : اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق باشد و $\{\lambda_n\}$ یک دنباله کراندار باشد، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n . a_n$ نیز همگرای مطلق است

برهان : دنباله $\{\lambda_n\}$ کراندار می باشد. بنابراین عددی مثبت مانند λ موجود است به طوری که:

(۱) به ازای هر n ، $|\lambda_n| < \lambda$

حال فرض می‌کنیم ε یک عدد مثبت دلخواه باشد. چون Σa_n همگرای مطلق است، به استناد معیار کوشی، عددی طبیعی مانند p موجود است به طوری که:

به ازای هر m , n که $n>m\geq p$،

$$|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + |a_{m+3}| + \dots + |a_n| < \frac{\varepsilon}{\lambda} \qquad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که به ازای هر n,m که $n>m\geq p$:

$$|\lambda_{m+1}\ a_{m+1}| + |\lambda_{m+2}\ a_{m+2}| + \dots + |\lambda_n\ a_n|$$
$$= |\lambda_{m+1}|\ |a_{m+1}| + |\lambda_{m+2}|\ |a_{m+2}| + \dots + |\lambda_n||a_n|$$
$$< \lambda\ (|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \dots + |a_n|)$$
$$< \lambda\ .\ \frac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon$$

از این رو به استناد معیار کوشی، سری $\Sigma\ |\lambda_n.a_n|$ همگرا می‌باشد لذا بنا به تعریف، سری $\Sigma\lambda_n.a_n$ همگرای مطلق است.

تبصره : در قضیه بالا شرط همگرایی مطلق سری Σa_n برای برقراری قضیه الزامی است. زیرا این حکم نادرست است که اگر سری Σa_n همگرا و دنباله $\{\lambda_n\}$ کراندار باشد، سری $\Sigma \lambda_n.a_n$ همگراست.

به عنوان مثال، فرض می کنیم $a_n = (-1)^{n-1}.\frac{1}{n}$ بعدا ثابت خواهیم کرد که سری Σa_n همگرای مشروط است. اگر فرض کنیم $\lambda_n = (-1)^{n-1}$ ، ملاحظه‌کنیم که دنباله $\{\lambda_n\}$ کراندار است ولی چنان که می‌دانیم:

سری، $\Sigma \lambda n\, an = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \Sigma (-1)^{2n-2} \cdot \frac{1}{n} = \Sigma \frac{1}{n}$

همگرا نیست.

۱۱.۲: بخش یازدهم

آزمون سریهای متناوب

تعریف: هر سری به صورت $\Sigma (-1)^{n-1} V_n = V_1 - V_2 + V_3 - V_4 + \dots$ را، که در آن $\{V_n\}$ دنباله ای از اعداد مثبت است، یک سری متناوب می نامند.

توجه کنید که جمله اول سری متناوب مثبت است.

۱۲.۲: بخش دوازدهم

آزمون لایپنیتس :

اگر $\{V_n\}$ یک دنباله نزولی از اعداد مثبت و به صفر همگرا باشد، آن گاه سری متناوب ، $\Sigma (-1)^{n-1} V_n$ همگراست.

برهان : فرض می کنیم $\{б_n\}$ دنباله مجموعهای جزئی باشد.

مرحله اول: داریم $б_{2n} = V_1 - V_2 + V_3 - \dots - V_{2n-2} + V_{2n-1} - V_{2n}$

$V_1 - (V_2 - V_3) - \dots - (V_{2n-2} - V_{2n-1}) - V_{2n}$

$\leq V_1$ ، به ازای هر n

زیرا، چون $\{V_n\}$ دنباله ای نزولی از اعداد مثبت است، داخل هر پرانتز عددی نامنفی است. بعلاوه، $V_{2n} > 0$. بنابراین، (۱) دنباله $\{б_{2n}\}$ از بالا به V_1 کراندار است.

مرحله دوم: به همین دلیل ، $б_{2n+2} - б_{2n} = б_{2n} + V_{2n+1} - V_{2n+2} - б_{2n}$

به ازای هر n، $= V_{2n+1} - V_{2n+2} \geq 0$

بنابراین دنباله $\{б_{2n}\}$ صعودی است.

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که دنباله $\{б_{2n}\}$ همگراست. فرض کنید :

$$\lim_{n\to\infty} \text{б}_{2n} = \text{б} \qquad (۳)$$

مرحله سوم : همچنین : $\text{б}_{2n+1} = \text{б}_{2n} + V_{2n+1}$

لذا به استناد (۳) و فرض قضیه: $\lim_{n\to\infty} \text{б}_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(\text{б}_{2n} + V_{2n+1})$

$$= \text{б} + 0 = \text{б} \qquad (۴)$$

از (۳) و (۴) ، داریم: $\lim_{n\to\infty} \text{б}_n = \text{б}$

و بنابراین ، سری متناوب مفروض $\Sigma(-1)^{n-1} V_n$ همگرا (به б) است.

توجه کنید که : $\text{б}_{2n} = V_1 - V_2 + V_3 - V_4 + \ldots + V_{2n-1} - V_{2n}$

$$= (V_1 - V_2) + (V_3 - V_4) + \ldots + (V_{2n-1} - V_{2n})$$

$$\geq 0 \qquad \text{به ازای هر } n$$

از این نامساوی و (۱) نتیجه می گیریم که به ازای هر n ، $0 \leq \text{б}_{2n} \leq V_1$ که مستلزم $0 \leq \text{б} < V_1$ است.

تبصره ۱ : اگر دنباله $\{V_n\}$ یکنوا باشد و $V_n \longrightarrow V \neq 0$ ، آن گاه سری متناوب مفروض نوسانی متناهی خواهد بود ، زیرا به استناد معادله (۳) ، $\lim_{n\to\infty} \text{б}_{2n} = \text{б}$

ولی، $\lim_{n\to\infty} \text{б}_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \text{б}_{2n} + \lim_{n\to\infty} V_{2n+1} = \text{б} + V$

بنابراین، $\{\text{б}_n\}$ بین б و $\text{б} + V$ نوسان می کند.از این رو، سری مفروض بین б و $\text{б} + V$ نوسان می‌کند.

تبصره ۲: سری متناوب را به صورت $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n V_n = -V_1 + V_2 - V_3 + \ldots$ نیز می توان در نظر گرفت.

تبصره ۳: جهت همگرائی سری $\Sigma(-1)^{n-1} V_n$ برقراری هر دو شرط مذکور در قضیه لایپنیس الزامی است. به عبارت دیگر، اگر یکی از دو شرط فوق برقرار نباشد، سری $\Sigma(-1)^{n-1} V_n$

نمی‌تواند همگرا باشد.

مثال ۱: نشان دهید که الف - سری $\sum (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ همگراست.

ب - آیا این سری همگرای مشروط است.

حل (الف): از مقایسه سری $\sum (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ با سری $\sum (-1)^{n-1} V_n$ ، داریم:

$$V_n = \frac{1}{n} \quad \text{و} \quad V_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$V_n - V_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0 \qquad \text{به ازای هر } n$$

لذا، دنباله $\{V_n\}$ نزولی است، بعلاوه،

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

بنابراین سری فوق هر دو شرط آزمون لایپنیتس را داراست و بنابر همان آزمون، همگرااست.

حل (ب): اگر فرض کنیم $a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ ، آن‌گاه $|a_n| = \frac{1}{n}$ چون سری $\sum\frac{1}{n}$ همگرا نیست، سری مفروض همگرای مطلق نیست. بنابراین، سری $\sum a_n$، که همگراست ولی همگرای مطلق نیست، همگرای مشروط است.

مثال ۲ : در مورد همگرائی سریهای زیر بحث کنید:

(الف): $\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

(ب): $\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} - \frac{1}{\log 5} + \cdots$

(ج): $\sum (-1)^n \frac{n}{n+1}$

(د): $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} \quad (P > 0)$

حل (الف): در این جا $V_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. لذا $V_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. نامساوی $n+1>n$ مستلزم $\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$ است که از آن نامساوی $\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$ نتیجه می شود.ازاین رو ,

به ازای هر n ، $V_{n+1}<V_n$ ، بنابراین دنباله $\{V_n\}$ نزولی است.

همچنین : $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$. در نتیجه، دنباله $\{V_n\}$ نزولی و همگرا به صفراست. بنابراین به استناد آزمون لایپنیتس ، سری $\sum(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ همگراست.

حل (ب): سری را به صورت، $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\log n}$ می‌نویسیم ، لذا $V_n=\frac{1}{\log n}$.

نامساوی $n+1>n$ مستلزم $\log(n+1)>\log n$ است که از آن نامساوی $\frac{1}{\log(n+1)}<\frac{1}{\log n}$ نتیجه می شود. از این رو، به ازای هر n، $V_{n+1}<V_n$ بنابراین ، دنباله $\{V_n\}$ نزولی است.

همچنین، $\{V_n\}$ همگرا به صفر است. [زیرا، $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}=0$]

در نتیجه به استناد آزمون لایپنیتس ، سری $\sum(-1)^n\frac{1}{\log n}$ همگرا می باشد.

حل (ج): از مقایسه سری مفروض با سری $\sum(-1)^n V_n$ ، داریم : $V_n=\frac{n}{1+n}$

ملاحظه می کنیم که: $V_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}$ ، و در نتیجه ،

$$V_n-V_{n+1}=\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}=\frac{n(n+2)-(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$

به ازای هر n ،

$$=\frac{n^2+2n-n^2-1-2n}{(n+1)(n+2)}=\frac{-1}{(n+1)(n+2)}<0$$

یعنی ، به ازای هر n ، $V_n<V_{n+1}$

بنابراین ، دنباله $\{V_n\}$ صعودی است و:

$$\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n}=1\neq 0$$

بنابراین به استناد تبصره‌های بخش ۱۲، سری $\sum(-1)^n\frac{n}{(n+1)}$ همگرانیست، بلکه نوسانی متناهی است.

حل (د) : دراین جا $V_n=\frac{1}{n^p}$ با $p>0$. لذا، $V_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^p}$. نامساوی $n+1>n$ مستلزم $(n+1)^p>n^p$ است که از آن نتیجه می‌شود: $\frac{1}{(n+1)^p}<\frac{1}{n^p}$

ازاین رو،به ازای هر n ، $V_{n+1}<V_n$. بنابراین، دنباله $\{V_n\}$ نزولی‌است.

همچنین ، $\{V_n\}$ همگرا به صفر است. زیرا: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

در نتیجه به استناد آزمون لایپنتیس، سری $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p}$ همگرا می باشد.

مثال ۳: نشان دهید که سری متناوب زیر نوسانی متناهی است.

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{(n+1)}{n} = \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \dots$$

حل : مشابه سری (ج) مثال۲۱ عمل کنید.

مثال ۴: نشان دهید که سریهای زیر همگرایند:

(الف): $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ (ب): $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$

(ج): $1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{4}} + \dots$

حل ـ (الف): سری مفروض متناوب و به صورت $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$ است که از مقایسه آن با سری $\sum (-1)^{n-1} V_n$ نتیجه می شود که : $V_n = \frac{1}{2n-1}$

با تبدیل n به $n+1$ در V_n ، داریم: $V_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n+1}$

$$V_n - V_{n+1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+1-2n+1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{(n-1)(2n+1)} > 0$$

یعنی، به ازای هر n ، $V_n > V_{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim \frac{1}{2n-1} = 0$$

بنابراین به استناد آزمون لایپنیتس، سری فوق همگراست

حل (ب): از مقایسه سری مفروض با سری $\sum (-1)^{n-1} V_n$ در می یابیم که: $V_n = \frac{1}{n!}$

با تبدیل n به n+۱، داریم : $V_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$. از تساوی $(n+1)! = (n+1)n!$ نتیجه می‌گیریم: $n! < (n+1)!$ لذا $\frac{1}{n!} > \frac{1}{(n+1)!}$ ، یا به ازای هر n، $V_n > V_{n+1}$

همچنین $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$

بنابراین به استناد آزمون لایپنیتس، سری فوق همگراست.

حل (ج): سری مفروض یک سری متناوب است. از مقایسه آن با این سری $\sum (-1)^{n-1} V_n$ در می‌یابیم که $V_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ با تبدیل n به n+۱ داریم: $V_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$

نامساوی $n+1>n$ مستلزم $n^{\frac{3}{2}} < (n+1)^{\frac{3}{2}}$ است که از آن نامساوی

$$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} > \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$$

به دست می آید از این رو،به ازای هر n، $V_n > V_{n+1}$.همچنین:

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = 0$$

در نتیجه به استناد آزمون لایپنیتس، سری فوق همگراست.

مثال ۵: نشان دهید که سریهای زیر نوسانی متناهی هستند.

(الف): $\sum (-1)^n \frac{n}{n+2}$ (ب): $\sum (-1)^n \frac{n}{2n-1}$

حل(الف): سری $\sum (-1)^n \frac{n}{n+2}$ متناوب است.از مقایسه آن باسری متناوب $\sum (-1)^n V_n$

درمی یابیم که $V_n = \frac{n}{n+2}$

با تبدیل n به n+۱ ، داریم: $V_{n+1} = \frac{n+1}{n+3}$

بنابراین، $V_n - V_{n+1} = \frac{n}{n+2} - \frac{n+1}{n+3} = \frac{n(n+3) - (n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)}$

به ازای هر n، $= \frac{-2}{(n+2)(n+3)} < 0$

لذا، به ازای هر n، $V_n < V_{n+1}$

یعنی، دنباله $\{V_n\}$ صعودی است. همچنین، ملاحظه می کنیم که: $\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n(1+\frac{2}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1 \neq 0$$

و نتیجه می‌گیریم که سری مفروض نوسانی متناهی است.

حل (ب) را به متعلم واگذار می کنیم.

مثال ۶: نشان دهید که سریهای زیر همگرایند.

(الف): $\sum \frac{n(-1)^{n-1}}{5^n}$

(ب): $\frac{\text{Log}2}{2^2} - \frac{\text{Log}3}{3^2} + \frac{\text{Log}4}{4^2} - \dots$

(ج): $\sum (-1)^n (\sqrt[n]{n} - 1)$

حل (الف) : از مقایسه سری متناوب مفروض با سری $\sum (-1)^{n-1} V_n$ در می‌یابیم $V_n = \frac{n}{5^n}$.

تابع $V(x) = \frac{x}{5^x}$ را در نظر می‌گیریم. این تابع دارای مشتق:

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{5^x(1 - x\text{Log}5)}{5^{2x}}$$

است که بر بازه $[1 \text{ و } \infty)$ منفی است. از این رو، تابع v بر بازه $[1 \text{ و } \infty)$ نزولی است. و از آن نتیجه می گیریم که دنباله $\{V_n\}$ نزولی است.

همچنین،

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5^n \text{Log}5} = 0$$

[برای رفع ابهام، از قانون هوپیتال استفاده می کنیم]

بنابراین، به استناد آزمون لایپنیتس، سری فوق همگراست.

حل(ب):سری مفروض یک سری متناوب به صورت $\sum (-1)^n V_n$ میباشدکه درآن $V_n = \frac{\text{Log}n}{n^2}$ می‌باشد. در این جا تابع $V(x) = \frac{\text{Log}x}{x^2}$ را بر بازه $[2 \text{ و } \infty)$ مطرح می کنیم. مشتق این تابع عبارت است از:

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{(1 - 2\text{Log}\, x)}{x^3}$$

که بر بازه $[2 \text{ و } \infty)$ منفی است. از این رو، تابع V بر بازه $[2 \text{ و } \infty)$ نزولی است ، و نتیجه می گیریم که دنباله $\{V_n\}$ نزولی است. همچنین:

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{Log}n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n} = 0$$

[برای رفع ابهام، از قاعده هوپیتال استفاده می کنیم]

بنابراین به استناد آزمون لایپنیتس، سری فوق همگرا می باشد.

حل (ج): سری مفروض یک سری متناوب است. از مقایسه آن با سری $\sum (-1)^n V_n$ درمی‌یابیم که:

$$V_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$$

با تبدیل n به $n+1$ در V_n، خواهیم داشت:

$$V_{n+1} = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - 1$$

نامساوی $V_n > V_{n+1}$ معادل نامساوی های زیر است،

$$n^{\frac{1}{n}} - 1 > (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - 1$$

$$n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\text{Log}\,(n^{\frac{1}{n}}) > \text{Log}[(n+1)^{\frac{1}{n+1}}]$$

$$\frac{1}{n}\text{Log}\, n > \frac{1}{n+1}\text{Log}(n+1)$$

حال، تابع $f(x) = \frac{\text{Log}x}{x}$ را بر بازه $[2,\infty)$ در نظر می‌گیریم. مشتق این تابع عبارت است از:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1-\text{Log}\, x}{x^2}$$

که بر بازه $[2,\infty)$ منفی است. از این رو، تابع f بر بازه $[2,\infty)$ نزولی است. لذا نامساوی:

$$\frac{1}{n}\text{Log}\, n > \frac{1}{n+1}\text{Log}(n+1)$$

به ازای هر $n \geq 2$ برقرار است. و نتیجه می گیریم که نامساوی $V_n > V_{n+1}$ نیز به ازای هر $n \geq 2$ برقرار است. بنابراین، دنباله $\{V_n\}$ نزولی است.

همچنین:

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1) = 1 - 1 = 0$$

[زیرا، $\lim_{n\to\infty} {}^{1}/_{n} = 1$]

بنابراین به استناد آزمون لایپنیتس، سری فوق همگراست.

مثال ۷: ثابت کنید که سری $\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{2}{6}} + \sqrt{\frac{3}{8}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} + \ldots$ همگرا نیست.

حل : در این جا،

$$a_n = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} = \sqrt{\frac{n}{2n(1+1/n)}} = \sqrt{\frac{1}{2(1+1/n)}}$$

بنابراین، $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{\frac{1}{2}} \neq 0$. لذا شرط لازم برای همگرایی برقرار نیست و سری Σa_n نمی‌تواند همگرا باشد.

مثال ۸: با استفاده از معیار کوشی، ثابت کنید که سری $\Sigma \frac{1}{n^2}$ همگراست.

حل: کافی است ثابت کنیم که دنباله $\{\sigma_n\}$ با $\sigma_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ همگراست، این در مثال ۹ بخش ۳۴ کتاب ثابت شده است.

مثال ۹: با استفاده از معیار کوشی، ثابت کنید که سری $\Sigma \frac{1}{2n-1}$ واگراست.

حل: واگرایی دنباله $\sigma_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2n-1}$ در مثال (۴) بخش ۳۴ کتاب ثابت شده است.

مثال ۱۰: ثابت کنید که سری $\Sigma \frac{1}{n^p}$ با $p \leq 1$ واگرا به ∞ است.

حل: ملاحظه می‌کنیم که

$$\sigma_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p}$$

بنابراین،

$$\sigma_m = 1 + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \frac{1}{(n+1)^p} + \dots + \frac{1}{(2n)^p}$$

لذافرض $p \leq 1$ ایجاب می کند که

$$|\sigma_{2n} - \sigma_n| = \frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \dots + \frac{1}{(2n)^p}$$

$$\geq \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+2)} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

از این رو، به استناد معیار کوشی، نتیجه می‌گیریم که $\{\sigma_n\}$ نمی‌تواند همگرا باشد. همچنین نامساوی $\sigma_{n+1} - \sigma_n = \frac{1}{(n+1)^p} > 0$ نشان می دهد که $\{\sigma_n\}$ یک دنباله صعودی است. از این رو دنباله $\{\sigma_n\}$ واگرا به ∞ و برهان تمام است.

۱۳.۲: بخش سیزدهم

قضیه: اگر Σa_n همگرا و Σb_n واگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ واگراست.

برهان: چون Σa_n همگرا می باشد، دنباله مجموعهای جزئی $\{\sigma_n\}$ همگرا می‌باشد. و چون Σb_n واگرا می باشد، دنباله مجموعهای جزئی $\{T_n\}$ نیز واگرا می باشد. در نتیجه، دنباله $\{\sigma_n + T_n\}$، یعنی دنباله مجموعهای جزئی سری $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ واگرا می باشد.
بنابراین، این سری واگرا می باشد.

مثال ۱:

اگر $n = 1, 2, \ldots$ ، $V_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

نشان دهید که،

(الف): همواره $V_n > 0$

(ب): $\lim_{n\to\infty} V_n = 0$

(ج): سری $\Sigma (-1)^{n-1} V_n$ واگرا می باشد.

حل (الف): می دانیم که:

به ازای هر $n>1$ ، $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$

بنابراین به ازای هر $n>1$ ، $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} > 0$

همچنین بدیهی است که همواره، $\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} > 0$

از این رو، به ازای هر $n>1$ ، $\frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} > 0$

اگر توجه کنیم که $V_1 > 0$ ، نتیجه می گیریم که

به ازای هر n ، $V_n > 0$

حل (ب): اگر فرض کنیم $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ، آن گاه

همچنین اگر فرض کنیم ، $b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ، آن گاه

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad (2)$$

(۱) و (۲) ، نتیجه می گیریم که دنباله $\{V_n\}$ با $V_n = a_n + b_n$ ، همگرا به صفر است.

حل (ج) : $\sum (-1)^{n-1} a_n = \sum (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

چون $\{a_n\}$ یک دنباله نزولی می باشد که به صفر همگراست، از آزمون لایپنیتس نتیجه می‌گیریم که سری فوق همگراست.ولی سری:

$$\sum (-1)^{n-1} b_n = \sum (-1)^{n-1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \sum \frac{1}{n}$$

واگرا می باشد.[سری همساز]

بنابراین به استناد قضیه ۲-۱۳، سری:

$\sum (-1)^{n-1} V_n = \sum (-1)^{n-1} a_n + (-1)^{n-1} b_n$ واگرا می باشد.

۱۴.۲: بخش چهاردهم

سریهای با جمل مثبت

تعریف: یک سری که همه جمل آن مثبت باشد، یک سری با جمل مثبت نامیده می شود.

۱۵.۲: بخش پانزدهم

قضیه: یک سری با جمل مثبت یا همگراست یا واگرا به $+\infty$.

برهان: اگر فرض کنیم $\sum a_n$ یک سری با جمل مثبت باشد، آن گاه:

$$\sigma_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = \sigma_n + a_{n+1}$$

$> \sigma_n$ به ازای هر n ،

بنابراین، دنباله $\{\sigma_n\}$ اکیدا صعودی است.

حال اگر $\{\sigma_n\}$ از بالا کراندار باشد، همگراست وگرنه واگرا به ∞ است.

نتیجه : اگر $\sum a_n$ یک سری با جمل مثبت باشد و $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ آنگاه $\sum a_n$ واگرا به $+\infty$ است.

برهان: چون، بنابه فرض $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$، شرط لازم برای همگرایی برقرار نیست و، از این رو، سری Σa_n همگرا نمی‌باشد در نتیجه، Σa_n به سمت $+\infty$ واگرا می‌باشد. [قضیه ۱۵.۲]

مثال ۱: ثابت کنید که سری $\Sigma \cos\frac{1}{n}$ واگرا به ∞ است.

حل: ملاحظه می کنیم که به ازای هر n ,

$$a_n = \cos\frac{1}{n} > 0$$

و

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = \cos 0 = 1 \neq 0$$

لذا به استناد قضیه ۱۵.۲، سری Σa_n واگرا می‌باشد.

مثال ۲: نشان دهید که سری $\Sigma (\frac{n}{n+1})^n$ واگرا به ∞ است.

حل به ازای هر n

$$a_n = (\frac{n}{n+1})^n > 0$$

و:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n+1})^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n(1+\frac{1}{n})})^n = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{1+\frac{1}{n}})^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} \neq 0$$

بنابراین به استناد قضیه ۱۵.۲، سری Σa_n واگرا به ∞ است.

مثال ۳: در مورد همگرایی یا واگرایی سری زیر بحث کنید:

$$\frac{1}{1+2^{-1}} + \frac{2}{1+2^{-2}} + \frac{3}{1+2^{-3}} + \dots$$

حل: ملاحظه می کنیم که به ازای هر n ,

$$a_n = \frac{n}{1+2^{-n}} > 0$$

و

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+2^{-n}} = \frac{\infty}{1+2^{-\infty}} = \frac{\infty}{1} = \infty$$

لذا به استناد قضیه ۱۵.۲ ، سری Σa_n واگرا می‌باشد.

۱۶.۲:بخش شانزدهم

قضیه پرینگشیم: اگر $\{a_n\}$ دنباله ای با جمل مثبت و اکیدا نزولی باشد ، شرط لازم برای همگرایی

سری Σa_n آن است که $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$، ولی این شرط کافی نیست.

برهان: فرض کنیم سری Σa_n یک سری با جمل مثبت و همگرا باشد. به استناد اصل عمومی کوشی، به ازای هر عدد مثبت مانند ε یک عدد طبیعی مانند m موجود است به طوریکه:

به ازای هر $n \geq m$ ، $|a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

که چون هر a_n مثبت است، نتیجه می شود که

(۱) به ازای هر $n \geq m$ ، $a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \dots + a_n < \frac{\varepsilon}{2}$

چون دنباله $\{a_n\}$ اکیدا نزولی است، متوجه می شویم که

(۲) به ازای هر $n \geq m$، $a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n > a_n + a_n + \dots + a_n =$

$= (n-m)a_n$

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که:

(۳) به‌ازای هر $n \geq m$، $(n-m)a_n < \frac{\varepsilon}{2}$

به استناد قضیه ۳.۲، همگرایی Σa_n ایجاب می کند که $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ بنابراین، یک عدد صحیح مثبت مانند m_1 موجود است به طوریکه:

به‌ازای هر $n \geq m_1$ ، $|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2m}$

که چون هر a_n مثبت است، نتیجه می شود که

به‌ازای هر $n \geq m_1$، $a_n < \frac{\varepsilon}{2m}$

(۴) به‌ازای هر $n \geq m_1$ ، $ma_n < \frac{\varepsilon}{2}$

حال فرض می‌کنیم $P = \max\{m \text{ و } m_1\}$ بنابراین، (۳) و (۴) به ازای هر $n \geq p$ برقرارند. از جمع آنها، خواهیم داشت:

به‌ازای هر $n \geq p$ ، $(n-m)a_n + ma_n < \varepsilon$

به‌ازای هر $n \geq p$ ، $na_n < \varepsilon$

بنابراین $\lim_{n\to\infty} n.a_n = 0$ و برهان لزوم شرط تمام است.

برای اثبات عدم کفایت شرط، فرض می کنیم $a_n = \frac{1}{n\mathrm{Log}n}$

ملاحظه می کنیم که: $\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n} = 0$

اماسری Σa_n واگراست.(به بخش ۲۳ مراجعه شود.)

۱۷.۲: بخش هفدهم

قضیه: سری Σa_n با $a_n > 0$ همگرا می‌باشد اگر و فقط اگر دنباله مجموعهای جزئی آن، یعنی $\{\sigma_n\}$ ، از بالا کراندار باشد.

حل: چون هر a_n مثبت است، می‌بینیم که *به‌ازای* هر n ، $\sigma_{n+1} = \sigma_n + a_{n+1} > \sigma_n$

بنابراین، دنباله $\{\sigma_n\}$ صعودی است. از این رو، $\{\sigma_n\}$ همگراست اگر و فقط اگر از بالا کراندار باشد.

در نتیجه، سری Σa_n همگرا می‌باشد، اگر وفقط اگر $\{\sigma_n\}$ از بالا کراندار باشد

۱۸.۲ بخش هیجدهم

قضیه: سری Σa_n با $a_n > 0$ واگرا به $+\infty$ می‌باشد اگر وفقط اگر دنباله $\{\sigma_n\}$ از بالا بی کران باشد.

برهان : چنان که در قضیه ۱۷.۲ ثابت کردیم، دنباله $\{\sigma_n\}$ صعودی است. در نتیجه، $\{\sigma_n\}$ واگرا به $+\infty$ است اگر وفقط اگر از بالا بیکران باشد از این رو سری Σa_n واگرا به $+\infty$ است اگر وفقط اگر دنباله $\{\sigma_n\}$ از بالا بیکران باشد.

۱۹.۲ بخش نوزدهم

قضیه: فرض کنید Σa_n و Σb_n دو سری با جمل مثبت باشند و عددی طبیعی مانند K موجود باشد به طوری که به ازای هر $n > k$ ، $a_n \le b_n$ در این صورت اگر سری Σb_n همگرا باشد سری Σa_n نیز همگرا است.

برهان: فرض می‌کنیم $\{\sigma_n\}$ $\{T_n\}$، به ترتیب، دنباله های مجموعهای جزئی دو سری Σa_n و Σb_n باشند. فرض قضیه ایجاب می کند که

$$\sigma_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n$$

$=\sigma_k + a_{k+1} + \ldots + a_n$

$\leq \sigma_k + b_{k+1} + \ldots + b_n$ به ازای هر $n>k$،

بنابراین، $\sigma_k \leq \sigma_k + T_n - T_k$ به ازای هر $n>k$،

یا (۱) $\sigma_k \leq c + T_n$ به ازای هر $n>k$

[زیرا، $c = \sigma_k - T_k$ مستقل از n است.]

اما، سری Σb_n همگراست. بنابراین، به استناد قضیه ۱۷.۲، $\{T_n\}$ از بالا کراندار است. لذا به استناد (۱)، $\{\sigma_n\}$ هم از بالا کراندار است. در نتیجه، سری Σa_n نیز همگرا می باشد. (قضیه ۱۷.۲)

۲۰.۲: بخش بیستم

قضیه: فرض می کنیم Σa_n و Σb_n دو سری با جمل مثبت باشند و عددی طبیعی مانند k موجود باشد به طوریکه به ازای هر $n>k$ ، $a_n \leq b_n$ در این صورت، اگر سری Σb_n واگرا باشد سری Σa_n نیز واگرا می باشد.

برهان: اگر $\{\sigma_n\}$ $\{T_n\}$، دنباله های مجموعهای جزئی سریهای Σa_n و Σb_n باشند، فرض قضیه ایجاب می‌کند که

$\sigma_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n$

$=\sigma_k + a_{k+1} + \ldots + a_n$

$\geq \sigma_k + b_{k+1} + \ldots + b_n$ به ازای هر $n>k$،

$\sigma_n \geq \sigma_k + (T_n - T_k)$ به ازای هر $n>k$،

$\sigma_n \geq c + T_n$ (۱) به‌ازای هر $n\geq k$،

زیرا $c=\sigma_k - T_k$ مستقل از n است.اما سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا می‌باشد. بنابراین، $\{T_n\}$ بی‌کران است،(بخش ۱۸) و نتیجتاً، $\{\sigma_n\}$ هم از بالا بی کران می‌باشد. (بنا به (۱)).از این رو، به استناد قضیه ۱۸.۲ ، سری Σa_n واگراست.

تبصره: قضایای ۲۰.۱۹ آزمون‌های مقایسه برای سریهای با جمل مثبت نامیده می‌شوند.

توجه: با مفروضات قضیه ۱۹.۲ ، اگر سری Σb_n واگرا باشد آن گاه هیچ اظهار نظری درباره سری Σa_n نمی توان کرد. همچنین، با مفروضات قضیه ۲۰.۲ ، اگر سری Σb_n همگرا باشد آن گاه هیچ

اظهار نظری درباره سری Σa_n نمی توان کرد.

شکل عمومی تر آزمون مقایسه:

آزمونهای مقایسه بخشهای نوزده ،و بیست را میتوان به شکل عمومی تر نیز بیان کرد:

فرض می‌کنیم Σa_n و Σb_n سری‌های با جمل مثبت باشند و h عددی ثابت، مثبت ، و مستقل از n باشد و $K \in N$.

(الف) اگر به ازای هر $n \geq k$ ، $a_n \leq hb_n$ ، و سری Σb_n همگرا باشد ، سری Σa_n نیز همگراست.

(ب) اگر به ازای هر $n \geq k$ ، $a_n \geq hb_n$ ، و سری Σb_n واگرا باشد ، سری Σa_n نیز واگرا است.

اثبات این احکام راکه مشابه اثبات احکام مذکور در در بخشهای ۱۹ و ۲۰ است، به متعلم واگذار می‌کنیم.

۲۱.۲: بخش بیست و یکم

آزمون تراکم کوشی

فرض می‌کنیم $\{a_n\}$ دنباله ای با جمل مثبت و نزولی باشد. در این صورت، سری Σa_n همگراست. اگر و فقط اگر سری $\Sigma 2^n a_{2^n}$ همگرا باشد.

برهان: فرض می‌کنیم $\{\sigma_n\}$ و $\{T_n\}$ ، به ترتیب دنباله های مجموعهای جزئی سریهای Σa_n و $\Sigma 2^n a_{2^n}$ باشند می توان نوشت:

$$\sigma_{2^n} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2^n}$$

$$> a_2 + a_3 + \dots + a_{2^n}$$

$$\sigma_{2^n} > a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \dots + (a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n})$$

چون دنباله $\{a_n\}$ نزولی است، خواهیم داشت:

$$\sigma_{2^n} > a_2 + (a_4 + a_4) + (a_8 + a_8 + a_8 + a_8) + \dots + (a_{2^n} + a_{2^n} + \dots + a_{2^n})$$

یا

$$\sigma_{2^n} > a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^{n-1} a_{2^n}$$

$$= \frac{1}{2}[\, 2a_2 + 2^2 a_4 + 2^3 a_8 + \dots + 2^n a_{2^n} \,] = \frac{1}{2} T_n$$

که از آن نتیجه می‌شود: (۱)

$$T_n < 2\sigma_{2^n}$$

حال فرض می‌کنیم Σa_n همگرا باشد. بنابراین، $\{\sigma_n\}$ از بالاکراندار است.

لذا، زیر دنباله آن $\{\sigma_{2^n}\}$ نیز از بالاکراندار است.

به استناد (۱)، $\{T_n\}$ از بالاکراندار می باشد. از این رو، بنابر قضیه ۱۷.۲، سری $\sum 2^n a_{2^n}$ همگرا می باشد.

برعکس، فرض می کنیم $\sum 2^n a_{2^n}$ همگرا باشد. نشان می‌دهیم که سری $\sum a_n$ همگراست. چون $\{a_n\}$ نزولی است، نامساوی زیر به ازای هر n که $n<2^{k+1}$ برقرار است.

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \\
&< a_1 + a_2 + \dots + a_{2^{k+1}} \\
&= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{2^k} + \dots + a_{2^{k+1}-1}) + a_{2^{k+1}} \\
&< a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + \dots + (a_{2^k} + \dots + a_{2^k}) + a_{2^{k+1}} \\
&< a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^k a_{2^k} + a_1
\end{aligned}$$

از این رو، نامساوی

$$\sigma_n < 2a_1 + T_n \qquad (2)$$

به ازای هر n که $n<2^{k+1}$ برقرار است.

ولی، چون $\sum 2^n a_{2^n}$ همگرا می باشد، $\{T_n\}$ از بالاکراندار است. لذا، از (۲) نتیجه می‌شود که $\{\sigma_n\}$ نیز از بالاکراندار است. بنابراین، به استناد قضیه ۱۷.۲، سری $\sum a_n$ همگرا می‌باشد.

۲۲.۲: بخش بیست و دوم

قضیه: سری $\sum \frac{1}{n^p}$ همگراست اگر وفقط اگر $p>1$.

برهان: اگر $p\le 0$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \ne 0$ و به استناد قضیه ۱۵.۲، سری $\sum a_n$ واگرا می‌باشد اگر $p>0$، دنباله $\{a_n\}$ با $a_n = \frac{1}{n^p}$ نزولی با جمل مثبت است و می توانیم از آزمون تراکم کوشی استفاده کنیم.

با تبدیل n به 2^n در a_n، داریم:

$$a_{2^n} = \frac{1}{(2^n)^p} = \left(\frac{1}{2^n}\right)^p$$

بنابراین،

$$\sum 2^n a_{2^n} = \sum 2^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^p = \sum \left(\frac{1}{2^n}\right)^{p-1} = \sum \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$$

که یک سری هندسی با $r = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)$ است. از این رو:

اگر $p>1$، آن‌گاه $r<1$ و سری هندسی فوق همگراست.

اگر $p=1$ ، آن‌گاه $r=1$ و سری هندسی مذکور واگراست.

اگر $p<1$ ، آن‌گاه $r>1$ و سری هندسی مذکور واگراست.

بنابراین سری $\sum 2^n a_{2^n}$ همگراست در صورتی که $p>1$ و واگراست در صورتی که $p\leq 1$. لذا به استناد آزمون تراکم کوشی سری $\sum \frac{1}{n^p}$ همگراست در صورتی که $p>1$ و واگر است در صورتی که $p\leq 1$ باشد.

توضیحات:

$\sum \frac{1}{n^2}$ همگراست. (در این جا، $p=2$ که بزرگتر از واحد است)

$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ واگراست. (در این جا، $p=\frac{1}{2}$ که کوچکتر از واحد است)

تبصره : قضیه قبل به آزمون p مشهور است.

مثال ۱: در مورد همگرایی سری روبرو بحث کنید. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \operatorname{Log} n}$

حل : می دانیم که به ازای هر $n\geq 3$ ، $\operatorname{Log} n>1$

بنابراین، به ازای هر $n\geq 3$ ، $\frac{1}{\operatorname{Log} n}<1$

که از آن نتیجه می شود به ازای هر $n\geq 3$ ، $\frac{1}{n^2 \operatorname{Log} n}<\frac{1}{n^2}$

اما سری $\sum \frac{1}{n^2}$ همگرا می باشد. (آزمون p با $p=2$)

لذا، از آزمون مقایسه نتیجه می‌شود که سری روبرو همگرا می‌باشد. $\sum \frac{1}{n^2 \operatorname{Log} n}$

مثال ۱: در مورد همگرایی سری روبرو بحث کنید. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{Log} n}$

حل: می‌دانیم که به ازای هر n $\operatorname{Log} n<n$

بنابراین، به ازای هر n $\frac{1}{\operatorname{Log} n}>\frac{1}{n}$

اما، سری $\sum \frac{1}{n}$ واگراست. (آزمون p با $p=1$).

لذا، از آزمون مقایسه نتیجه می‌شود که سری $\sum \frac{1}{\operatorname{Log} n}$ نیز واگرا می‌باشد.

۲۳.۲ :بخش بیست وسوم

قضیه: سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\text{Log } n)^p}$ همگراست اگر و فقط اگر $p>1$.

برهان : حالت اول : فرض می‌کنیم $p\leq 0$ اگر بنویسیم $p=-q$ آنگاه $q\geq 0$،

و به ازای هر $n\geq 3$
$$\frac{1}{n(\text{Log } n)^p} = \frac{1}{n(\text{Log } n)^{-q}} = \frac{(\text{Log } n)^q}{n} \geq \frac{1}{n}$$

اما سری $\sum \frac{1}{n}$ واگرا می باشد. (آزمون p با $p=1$.)

بنابراین، سری مفروض به ازای $p\leq 0$ واگرا می باشد.

حالت دوم: فرض می‌کنیم $p>0$ دراین حالت، دنباله $\{a_n\}$ با $a_n = \frac{1}{n(\text{Log } n)^p}$ نزولی با جمل مثبت است، بنابراین میتوانیم ازآزمون تراکم کوشی استفاده کنیم.

ملاحظه می‌کنیم که
$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n(\text{Log} 2^n)^p} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\text{Log} 2)^p}$$
$$= \sum \frac{1}{(\text{Log} 2)^p} \cdot \frac{1}{n^p} = \frac{1}{(\text{Log} 2)^p} \sum \frac{1}{n^p}$$

اما، سری $\sum \frac{1}{n^p}$ همگراست اگر و فقط اگر $p>1$. (آزمون p)

بنابراین، سری $\sum \frac{1}{n(\text{Log } n)^p}$ همگراست اگر وفقط اگر $p>1$.

۲۴.۲: بخش بیست و چهارم

قضیه آزمون مقایسه

اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو سری با جمل مثبت باشند. آن گاه.

۱- $\sum a_n$ همگراست اگر $\overline{\text{Lim}} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \neq \infty$ و $\sum b_n$ همگرا باشد.

۲- $\sum a_n$ واگراست اگر $\underline{\text{Lim}} \frac{a_n}{b_n} = \mu \neq 0$ و $\sum b_n$ واگرا باشد

برهان (۱): فرض می کنیم λ' عددی حقیقی بزرگتراز λ باشد. چون $\overline{\text{Lim}} \frac{a_n}{b_n} = \lambda < \lambda'$

به استناد خواص حد زبرین ، عددی طبیعی مانند k موجود است به طوریکه

$\frac{a_n}{b_n} < \lambda'$ به ازای هر $n \geq k$ ،

یا: $\frac{a_n}{b_n} < \lambda' b_n$ به ازای هر $n \geq k$ ،

اما بنابه فرض، سری Σb_n همگراست. بنابراین، سری $\Sigma \lambda' b_n$ نیز همگرا می‌باشد در نتیجه به استناد قضیه ۱۹.۲ ، سری Σa_n نیز همگرا می‌باشد.

برهان (۲): فرض $\mu \neq 0$ ایجاب می‌کند که $\mu > 0$. [زیرا $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ یک دنباله با جمل مثبت است].

فرض می‌کنیم μ' عددی حقیقی باشد به طوریکه $0 < \mu' < \mu$

چون $\underline{\text{Lim}} \frac{a_n}{b_n} = \mu > \mu'$ به استناد خواص حد زیرین، یک عدد طبیعی مانند k موجود است به طوریکه:

$\frac{a_n}{b_n} > \mu'$ به ازای هر $n \geq k$ ،

یا: $a_n > \mu' b_n$ به ازای هر $n \geq k$ ،

اما سری Σb_n واگراست. بنابراین ، سری $\Sigma \mu' b_n$ نیز واگرا می باشد.

در نتیجه، سری Σa_n نیز واگراست. (قضیه ۲۰.۲)

توجه: (۱) برقرار است حتی اگر $\lambda = 0$ باشد. (۲) برقرار است حتی اگر $\mu = \infty$ باشد.

۲۵.۲: بخش بیست و پنجم

شکل عملی آزمون مقایسه:

اگر Σa_n و Σb_n دو سری با جمل مثبت باشند، آن‌گاه:

(الف) اگر $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ (متناهی و مخالف صفر)، آن‌گاه سریهای Σa_n و Σb_n تواما، همگرا یا واگرا می‌باشند.

(ب) اگر $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ و سری Σb_n همگراباشد، سری Σa_n نیز همگرا خواهد بود

(ج) اگر $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ و سری Σb_n واگرا باشد ، سری Σa_n نیز واگرا خواهد بود

برهان (الف):

چون $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ دنباله‌ای با جمل مثبت است، فرض $L \neq 0$ ایجاب می کند که $L > 0$ فرض می‌کنیم ε

عدد مثبت کوچکتر از L باشد. چون $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ ، عددی طبیعی مانند m موجود است به طوری‌که: به ازای هر $n \geq m$ ، $\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \varepsilon$

که از آن نتیجه می‌شود: به ازای هر $n \geq m$ ، $0 < L-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L+\varepsilon$

چون هر b_n مثبت است، ضرب طرفین این نامساویها در b_n جهت نامساویها را عوض نمی‌کند.

بنابراین: به ازای هر $n \geq m$ ، $b_n(L-\varepsilon) < a_n < b_n(L+\varepsilon)$

بالاخص: به ازای هر $n \geq m$ ، $a_n < (L-\varepsilon)b_n$

از این رو به استناد قضیه ۲۰.۲ ، اگر سری Σb_n واگرا باشد، سری Σa_n نیز واگرا می‌باشد.

همچنین : به ازای هر $n \geq m$ ، $a_n < (L+\varepsilon)b_n$.

لذابه استناد قضیه ۱۹.۲ اگر سری Σb_n همگرا باشد سری Σa_n نیز همگرااست.

برهان (ب): چون $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ، به ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض (به قدر دلخواه کوچک) یک عدد طبیعی مانند m موجود است به طوری که:

به ازای هر $n \geq m$ ، $\frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$

یا ، به ازای هر $n \geq m$ ، $a_n < \varepsilon b_n$

اما، بنا به فرض سری، Σb_n همگرا می‌باشد. لذا به استناد قضیه ۱۹.۲ این نامساویها ایجاب می کند که سری Σa_n نیز همگرا باشد.

برهان (ج): اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ، به ازای هر $k > 0$ مفروض (به قدر دلخواه بزرگ) یک عدد طبیعی مانند m موجود است به طوری که :

به ازای هر $n \geq m$ ، $\frac{a_n}{b_n} > k$

یا ، به ازای هر $n \geq m$ ، $a_n > kb_n$

اما بنا به فرض، سری Σb_n واگراست. لذا به استناد قضیه ۲۰.۲ ، این نامساویها ایجاب می کند که سری Σa_n نیز واگرا باشد.

۲۶.۲: بخش بیست و ششم

قضیه: اگر Σu_n و Σv_n دو سری با جمل مثبت باشند، آن‌گاه:

۱ - اگر، به ازای هر $n \geq m$، $\frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{v_n}{v_{n+1}}$ و Σv_n همگرا باشد، سری Σu_n نیز همگرا خواهد بود.

۲ - اگر، به ازای هر $n \geq m$، $\frac{u_n}{u_{n+1}} < \frac{v_n}{v_{n+1}}$ و Σv_n واگرا باشد، سری Σu_n نیز واگرا خواهد بود.

برهان (۱): فرض قضیه ایجاب می‌کند که

$$\frac{u_m}{u_n} = \frac{u_m}{u_{m+1}} \frac{u_{m+1}}{u_{m+2}} \cdots \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

به ازای هر $n \geq m$،

$$> \frac{v_m}{v_{m+1}} \frac{v_{m+1}}{v_{m+2}} \cdots \frac{v_{n-1}}{v_n}$$

یا به ازای هر $n \geq m$،

$$\frac{u_m}{u_n} > \frac{v_m}{v_n}$$

که از آن نتیجه می‌شود: به ازای هر $n \geq m$،

$$\frac{u_n}{u_m} < \frac{v_n}{v_m}$$

بنابراین: به ازای هر $n \geq m$،

$$u_n < \frac{u_m}{v_m} . v_n = c.v_n$$

که در آن $c = \frac{u_m}{v_m}$ مستقل از n می‌باشد.

اما بنا به فرض، سری Σv_n همگرا می‌باشد. از این رو به استناد قضیه ۱۹.۲، این نامساویها ایجاب می‌کنند که سری Σu_n نیز همگرا باشد.

برهان (۲) مشابه است و به متعلم واگذار می‌شود.

۲۷.۲: بخش بیست و هفتم

قضیه: سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p (\text{Log}n)^q}$ فقط و فقط وقتی همگراست که یا $p>1$ یا $p=1$ و $q>1$

برهان: فرض می‌کنیم

$$a_n = \frac{1}{n^p (\text{Log}n)^q}$$

حالت اول: $p>1$.

عدد $\delta>0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $P = 1+2\delta$، و فرض می‌کنیم $b_n = \frac{1}{n^{1+\delta}}$ آن‌گاه:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\left(\frac{1}{1+2\delta}\right)}.(\log n)^q}{n^{\left(\frac{1}{1+\delta}\right)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1+\delta}}{n^{1+2\delta}.(\log n)^q}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\delta}(\log n)^q}=0$$

اما، سری $\Sigma b_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}}$ همگراست.(آزمون p با $p=1+\delta$). لذا به استناد قضیه ۲۵.۲ سری Σa_n نیز همگرا می باشد.

حالت دوم: $p<1$ مجددا، $\delta>0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $p=1-2\delta$ ، وفرض می‌کنیم $b=\frac{1}{n^{1-\delta}}$. آنگاه[1]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1-2\delta}.(\log n)^q}.n^{1-\delta}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\delta}}{(\log n)^q}=\infty$$

اما، سری $\Sigma b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\delta}}$ واگراست. (آزمون p با $p=1-\delta$). لذا به استناد قضیه ۲۵.۲ سری Σa_n نیز واگرا می باشد.

حالت سوم: ($p=1$): فرض می‌کنیم $a_n=\frac{1}{n(\log n)^q}$. در این حالت، به استناد قضیه ۲۳.۲ ، سری Σa_n همگراست اگر و فقط اگر $q>1$.

مثال ۱: فرض کنید که Σa_n یک سری همگرا با جمل مثبت باشد. نشان دهید که:

(الف): $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ نیز همگراست . آیا عکس این حکم نیز برقرار است.

(ب): اگر همواره $a_n\neq 1$ ، سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{1-a_n}$ نیز همگراست.

(ج): $\Sigma\frac{a_n}{1+a_n}$ نیز همگرا است.

---

(۱)- *با استفاده از قاعده هوپیتال می توان ثابت کرد که اگر* $m>0$ *آنگاه* $\lim_{x\to\infty}\frac{x^m}{(\log x)^n}=\infty$

حل (الف): چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا می‌باشد، $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.ازاین رو به ازای $\varepsilon = 1$، عددی طبیعی مانند m موجود است بطوری که به ازای هر $n \geq m$، $a_n < 1$ که از آن با توجه به این که هر a_n مثبت است نتیجه می شود: به ازای هر $n \geq m$ ، $a_n^2 < a_n$

اما، سری $\sum a_n$ همگرا می‌باشد. بنابراین، به استناد قضیه ۱۹.۲، سری $\sum a_n^2$ نیز همگرا می‌باشد.

عکس این حکم برقرار نمی‌باشد.

یعنی اگر $\sum a_n^2$ همگرا باشد، $\sum a_n$ الزاما همگرا نمی‌باشد. به عنوان مثال، اگر $a_n = \frac{1}{n}$ ، آنگاه

$$\sum a_n^2 = \sum \frac{1}{n^2} \quad , \quad a_n^2 = \frac{1}{n^2}$$

که یک سری همگراست. (آزمون p با $p=2$) ولی سری $\sum \frac{1}{n}$ واگرا است. (آزمون p با $p=1$)

تبصره: این نتایج را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد که:

اگر یک سری با جمل مثبت همگرا باشد، آن‌گاه سری حاصل از مجذور جمل آن نیز همگرا می‌باشد، اما سری حاصل از جذر جمل الزاما همگرا نمی‌باشد.

حل (ب): همگرایی سری $\sum a_n$ ایجاب می‌کند که:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (1)$$

فرض می کنیم همواره $a_n \neq 1$ ، $b_n = \frac{a_n}{1 - a_n}$ آنگاه ، $\frac{a_n}{b_n} = 1 - a_n$ ، به استناد (۱)،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}(1 - a_n) = 1 - 0 = 1$$

اما، بنا به فرض سری $\sum a_n$ همگراست.

لذا به استناد قضیه ۲۵.۲ سری $\sum b_n$ نیز همگراست.

حل (ج) : را به متعلمین واگذار می‌کنیم.

مثال ۲: ثابت کنید اگر سریهای $\sum a_n^2$ و $\sum b_n^2$ همگرا باشند سری $\sum a_n.b_n$ نیز همگرا می‌باشد.

حل : از نامساوی (بین میانگین هندسی و حسابی) زیر

$$\sqrt{a_n^2.b_n^2} \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$$

نتیجه می‌شود که:

$$|a_n.b_n| \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$$

اما، سری $\sum(a_n^2 + b_n^2)$ ، که حاصل جمع دوسری همگرا میباشد، همگراست. لذا به استناد قضیه

۱۹.۲، سری $\Sigma|a_n.b_n|$ نیز همگراست. در نتیجه، سری $\Sigma a_n.b_n$ به طور مطلق همگراست، که از آن همگرایی $\Sigma a_n b_n$ نتیجه می‌شود.

مثال ۳: Σa_n یکسری همگرا با جمل نامنفی است. ثابت کنید که اگر $\alpha > \frac{1}{2}$ سری $\Sigma n^{-\alpha}.\sqrt{a_n}$ نیز همگرا می باشد.

حل: فرض می‌کنیم $u_n^2=\frac{1}{n^{2\alpha}}$ ، $V_n^2=a_n$

سری Σu_n^2 همگرا می‌باشد. (آزمون p با $p=2\alpha$)

سری Σv_n^2 نیز، بنا به فرض، همگراست. بنابراین، به استناد مثال ۲، $\Sigma u_n.v_n = \Sigma n^{-\alpha}\sqrt{a_n}$ همگرا می‌باشد و برهان تمام است.

مثال ۴: ثابت کنید که اگر سری Σu_n^2 همگرا باشد، سری $\Sigma \frac{u_n}{n}$ نیز همگراست.

حل: اگر $v_n = \frac{1}{n}$ ، سری Σv_n^2 همگرا می‌باشد. (آزمون p با $p=2$) سری Σu_n^2 نیز، بنا به فرض، همگرا می‌باشد.

بنابراین، به استناد مثال ۲، سری $\Sigma u_n v_n = \Sigma \frac{u_n}{n}$ همگرا می‌باشد.

مثال ۵: در مورد همگرائی سری‌های زیر بحث کنید:

(الف):
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2-1)}}$$

(ب)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5-5n^2+1}{5n^7+3n+2}$$

(ج):
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{3+2n^2}$$

(د):
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p(n+1)^p}$$

(ه):
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+q/n}}$$

توجه: در مثالهائی که a_n دارای عامل $n!$ و n^n نیست از آزمون مقایسه با $b_n = \frac{1}{n^p}$ استفاده می‌کنیم که درآن p عبارت است از تفاضل درجه صورت و مخرج.

حل (الف): فرض می‌کنیم $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n^2-1)}}$

(دراین جا، $p = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$)

خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2-1)}} \cdot n^{3/2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n^3(1-\frac{1}{n^2})}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{1}{n^2})}} = 1$$

که ناصفر و متناهی است.

اما، سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum \frac{1}{\sqrt{n^{3/2}}}$ همگراست. (آزمون p با $p = \frac{3}{2}$)

لذا به استناد قضیه ۲۵.۲، سری $\sum a_n$ نیز همگرا می‌باشد.

حل (ب): در این جا $a_n = \frac{n^5 - 5n^2 + 1}{5n^7 + 3n + 2}$ ازاین رو، انتخاب می‌کنیم:

$b_n = \frac{1}{n^2}$ ، $(p = 7 - 5 = 2)$ ، لذا داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5 - 5n^2 + 1}{5n^7 + 3n + 2} \times n^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^5(1 - \frac{5}{n^3} + \frac{1}{n^5}) \times n^2}{n^7(5 + \frac{3}{n^6} + \frac{2}{n^7})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{5}{n^3} + \frac{1}{n^5}}{5 + \frac{3}{n^6} + \frac{2}{n^7}} = \frac{1}{5}$$

که ناصفر و متناهی است. اما، سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ همگرا می‌باشد. (آزمون p با $p = 2$)

در نتیجه، به استناد قضیه ۲۵.۲، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرا می‌باشد.

حل (ج): در این جا $a_n = \frac{2+n}{3+2n^2}$ از این رو، انتخاب می‌کنیم: $b_n = \frac{1}{n}$ ، $(p = 2 - 1 = 1)$ ، آن‌گاه:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+n}{3+2n^2} \cdot n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\frac{2}{n}+1)\, n}{n^2(\frac{3}{n^2}+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}+1}{\frac{3}{n^2}+2} = \frac{1}{2}$$

که‌ناصفر ونامتناهی است. اما، سری $\Sigma b_n = \Sigma \frac{1}{n}$ واگرا می‌باشد (آزمون p با $p=1$) در نتیجه به استناد قضیه ۲۵.۲ ، سری Σa_n نیز واگرا می‌باشد.

توجه: وقتی $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ ناصفر و متناهی است، تنها چیزی که می‌توانیم نتیجه بگیریم این است که آزمون مقایسه قابل اعمال است، که در نتیجه آن سریهای Σa_n و Σb_n توامأ همگرا یا واگرا می‌باشند. به عبارت دیگر، در این شرایط همگرایی یا واگرایی یکی از دو سری فوق به همگرایی یا واگرایی دیگری بستگی دارد.

حل (د): در این جا $a_n = \frac{1}{n^p(n+1)^p}$. ازاین رو،انتخاب می‌کنیم: $b_n = \frac{1}{n^{2p}}$

آن گاه:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p(n+1)^p} . n^{2p}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2p}}{n^p . n^p (1+ \ /n)^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+ 1/n)^p} = 1$$

که ناصفر و متناهی است.

اما، سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا می‌باشد. اگر و فقط اگر $2p>1$ یا $p>\frac{1}{2}$.

در نتیجه، به استناد قضیه ۲۵.۲ ، سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست اگر و فقط اگر $p>\frac{1}{2}$.

حل(ه) : دراین جا $a_n = \frac{1}{n^{p+q/n}}$ ازاین رو، انتخاب می کنیم: $b_n = \frac{1}{n^p}$. آن گاه:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{n^{p+q/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{q/n}} = \frac{1}{n^0} = 1$$

که ناصفر و متناهی است.

اما سری Σb_n همگرااست اگر و فقط اگر $p>1$

در نتیجه، به استناد قضیه ۲۵.۲ ، سری Σa_n نیز همگرا می‌باشد. فقط و فقط وقتی که $p>1$.

مثال ۶: در مورد همگرایی سریهای زیر بحث کنید:

(الف):

$$1 + \frac{2^{\frac{1}{100}}}{2} + \frac{3^{\frac{1}{100}}}{3} + \frac{4^{\frac{1}{100}}}{4} + \dots$$

(ب): $\frac{۲}{۱^p} + \frac{۳}{۲^p} + \frac{۴}{۳^p} + \dots$

(ج): $\sum_{n=۱}^{\infty} \sqrt{n^۲+۱-n}$

(د): $۱ + \frac{۱^۱}{۲^۲} + \frac{۲^۲}{۳^۳} + \frac{۳^۳}{۴^۴} + \dots$

حل (الف): در این جا $a_n = \frac{n^{\frac{۱}{۱۰۰}}}{n} = \frac{۱}{n^{\frac{۹۹}{۱۰۰}}}$

بنابراین Σa_n واگراست. (آزمون p با $p = \frac{۹۹}{۱۰۰} < ۱$)

حل (ب): در این جا $a_n = \frac{n+۱}{n^p}$

از این رو انتخاب می‌کنیم $b_n = \frac{۱}{p-۱}$ آن‌گاه:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n+۱}{n^p} n^{p-۱} = \frac{n(۱+۱/n)}{n^p} n^{p-۱} = ۱+\frac{۱}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = ۱+۰ = ۱$$

که ناصفر و متناهی است.

اما، سری Σb_n همگراست اگر و فقط اگر $p-۱>۱$ یا $p>۲$ و واگراست اگر و فقط اگر $p-۱\leq ۱$ یا $p\leq ۲$ بنابراین به استناد قضیه ۲۵.۲، سری Σa_n همگراست اگر و فقط اگر $p>۲$، و واگرا است اگر و فقط اگر $p\leq ۲$.

حل (ج): دراین جا $a_n = \sqrt{n^۲+۱-n}$

از این رو، $b_n = \frac{۱}{n^{-۱}}$ انتخاب می‌کنیم. آنگاه:

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n = \sqrt{n^۲+۱-n}\,.\,n^{-۱} = n\sqrt{۱+۱/n^۲-۱/n}\,.\,۱/n = \sqrt{۱+۱/n^۲-۱/n}$$

و در نتیجه $\lim \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{۱+۰+۰} = ۱$

که ناصفر و متناهی است. اما، سری Σb_n واگراست. (آزمون p با $p=-۱$). لذا، به استناد قضیه ۲۵.۲ سری Σa_n نیز واگرا می‌باشد.

حل (د): با صرف نظراز جمله اول، داریم: $a_n = \frac{n^n}{(n+۱)^{n+۱}}$

از این رو $b_n = \frac{1}{n}$ انتخاب می‌کنیم. (زیرا $p = -n+1+n = 1$) آن‌گاه:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^n\, n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^{n+1}}{n^{n+1}.(1+1/n)^{n+1}} = \frac{1}{(1+1/n)^{n+1}} = \frac{1}{(1/n+1)(1+1/n)^n}$$

و در نتیجه داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{e(1)} = \frac{1}{e}$$

که ناصفر و متناهی است

اما، سری Σb_n واگرااست. (آزمون p با $p=1$)

در نتیجه به استناد قضیه ۲۵.۲ ، سری Σa_n نیز واگرا می‌باشد.

مثال ۷: در مورد همگرایی سریهای زیر بحث کنید:

(الف): $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$

(ب): $\Sigma \frac{1}{2n-1}$

(ج): $\Sigma \frac{1}{n^{1+1/n}}$

(د): $\frac{1}{1\times 3} + \frac{2}{5\times 7} + \frac{3}{9\times 11} + \dots$

حل (الف): در این جا $a_n = \frac{1}{n^2 \log n}$ از این رو، $b_n = \frac{1}{n^2}$ انتخاب می‌کنیم.

آن‌گاه:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{n^2 \log n} = \frac{1}{\log n}$$

و در نتیجه،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0$$

اما، سری Σb_n همگراست. (آزمون p با $p=2$)

بنابراین، به استناد قضیه ۲۵.۲، سری Σa_n نیز همگرا می‌باشد.

تبصره: برای مثال قبل، راه حل جداگانه در مثال (۱) بخش ۲۲ ارائه شده است.

حل (ب): در این جا $a_n = \frac{1}{2n-1}$. از این رو، $b_n = \frac{1}{n}$ انتخاب می کنیم. آن‌گاه:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{2n-1} = \frac{n}{n(2-1/n)} = \frac{1}{(2-1/n)}$$

و بنابراین،
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-1/n}=\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2}$$
که ناصفر و متناهی است.

اما، سری Σb_n واگراست. (آزمون p با $p=1$) لذا به استناد قضیه ۲۵.۲، Σa_n نیز واگراست.

حل (د): ملاحظه می‌کنیم که:
$$a_n=\frac{n}{(\text{جمله } n\text{ام تصاعد حسابی } 3\text{ و } 7\text{ و } 11\text{ و}\ldots)(\text{جمله } n\text{ام تصاعد حسابی } 1\text{ و } 5\text{ و } 9\text{ و}\ldots)}$$
$$a_n=\frac{n}{[1+(n-1)4][3+(n-1)4]}=\frac{n}{(4n-3)(4n-1)}$$
از این رو، $b_n=\frac{1}{n}$. (زیرا، $p=2-1=1$)

بنابراین،
$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{n^2}{n(4-3/n)n(4-1/n)}=\frac{1}{(4-3/n)(4-1/n)}$$
و نتیجه می‌گیریم که:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{16}$$
که ناصفر و متناهی است.

اما سری Σb_n واگراست. (آزمون p با $p=1$)

بنابراین به استناد قضیه ۲۵.۲، سری Σa_n نیز واگرا می‌باشد.

مثال ۸: در مورد همگرایی سریهای زیر بحث کنید:

(الف): $\Sigma\,(\sqrt{n^2+1}-n)$

(ب): $\Sigma\,(\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1})$

(ج): $\Sigma\,(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p})$

حل (الف): در این جا $a_n=(\sqrt{n^2+1}-n)$. می توان نوشت:
$$a_n=(\sqrt{n^2+1}-n)\ \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$$
بنابراین . $b_n=\frac{1}{n}$. و خواهیم داشت:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{n}{n(\sqrt{1+1/n^2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

که ناصفر و متناهی است.

اما سری Σb_n واگراست. (آزمون p با $p=2$)

در نتیجه، به استناد قضیه ۲۵.۲، سری Σa_n نیز واگرا می‌باشد.

حل (ب): در این جا $a_n = \sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1}$ می‌توان نوشت:

$$a_n = \frac{(\sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1})(\sqrt{n^4+1} + \sqrt{n^4-1})}{\sqrt{n^4+1} + \sqrt{n^4-1}} = \frac{2}{\sqrt{n^4+1} + \sqrt{n^4-1}}$$

بنابراین با $b_n = \frac{1}{n^2}$ داریم:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2n^2}{\sqrt{n^4+1} + \sqrt{n^4-1}} = \frac{2n^2}{n^2(\sqrt{1+1/n^4} + \sqrt{1-1/n^4})} = \frac{2}{\sqrt{1+1/n^4} + \sqrt{1-1/n^4}}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{2}{1+1} = 1$$

که ناصفر و متناهی است.

اما سری Σb_n همگراست. (آزمون p با $p=2$)

در نتیجه به استناد قضیه ۲۵.۲. سری Σa_n نیز همگرا می‌باشد.

حل (ج): در این جا

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^p}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^p} \times \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{n^p(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

بنابراین، $b_n = \frac{1}{n^{p+1/2}}$ و داریم:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{p+1/2}}{n^p(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{n^{1/2}}{\sqrt{n}(\sqrt{1+1/n}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

که ناصفر و متناهی است.

اما، سری Σb_n همگرا است فقط و فقط وقتی که $p+\frac{1}{2}>1$ یا $p>\frac{1}{2}$ ، و واگراست فقط و فقط وقتی که $p\leq\frac{1}{2}$.بنابراین از آزمون مقایسه نتیجه می‌شود که سری Σa_n همگراست در صورتی که $p>\frac{1}{2}$ ، و واگراست در صورتی که $p\leq\frac{1}{2}$.

۲۸.۲: بخش بیست وهشتم

در این جا بسط چند تابع را یادآوری می‌کنیم.

$$(1+x)^n = 1+ nx+ \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+ \dots \quad . |x|<1 \qquad (1$$

که بسط دو جمله‌ای است .

$$\operatorname{Sin}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \qquad (2$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots \qquad (3$$

$$\operatorname{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad . |x|<1 \qquad (3$$

مثال ۹: در مورد همگرایی یا واگرایی سری زیر بحث کنید:

(الف): $\Sigma(\sqrt[3]{n^3+1} - n)$

(ب): $\Sigma(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$

(ج): $\Sigma \operatorname{Sin}\frac{1}{n}$

(د): $\Sigma \frac{1}{\sqrt{n}} \tan\frac{1}{n}$

(ه): $\Sigma (\frac{1}{n} - \operatorname{Log}\frac{n+1}{n})$

حل (الف): در این جا $a_n = (n^3+1)^{\frac{1}{3}} - n$ به استناد بسط دوجمله‌ای:

$$a_n = n(1+\frac{1}{n^3})^{\frac{1}{3}} - n = n[(1+\frac{1}{n^3})^{\frac{1}{3}} - 1]$$

$$n[(1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{n^3} + \frac{1/3(1/3-1)}{2!}\times\frac{1}{n^6} + \dots) - 1]$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{n^2} - \frac{1}{9} \times \frac{1}{n^5} + \dots$$

حال اگر $b_n = \frac{1}{n^2}$، آن‌گاه:

$$\frac{a_n}{b_n} = n^2\left[\frac{1}{3n^2} - \frac{1}{9n^5} + \dots\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{9n^3} + \dots$$

و

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{3}$$

که ناصفر و متناهی است. اما سری Σb_n همگرا می‌باشد. (آزمون p با $p=2$)

در نتیجه به استناد قضیه ۱۵.۲، سری Σa_n نیز همگرا می‌باشد.

حل (ب): در این جا $a_n = (n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}$ به استناد بسط دوجمله‌ای:

$$a_n = n^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}} = n^{\frac{1}{3}}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right]$$

$$= n^{\frac{1}{3}}\left[\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\times\frac{1}{n^2} + \dots\right) - 1\right]$$

$$= n^{\frac{1}{3}}\left[\frac{1}{3n} - \frac{1}{9n^2} + \dots\right] = \frac{1}{3n^{2/3}} - \frac{1}{9n^{5/3}} + \dots$$

حال، اگر $b_n = \frac{1}{n^{2/3}}$ آن‌گاه:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9n} + \dots$$

و در نتیجه،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{3}$$

که ناصفر و متناهی است. اما Σb_n واگراست. (آزمون p با $p=\frac{2}{3}$)

از این رو به استناد قضیه ۲۵.۲، سری Σa_n نیز واگرا می‌باشد.

حل (ج): در این جا $a_n = \sin\frac{1}{n}$ به استناد بسط تابع سینوس:

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{(1/n)^3}{3!} + \frac{(1/n)^5}{5!} - \dots = \frac{1}{n}\left[1 - \frac{(1/n)^2}{3!} + \frac{(1/n)^4}{5!} - \dots\right]$$

حال، اگر $b_n = \frac{1}{n}$ آن‌گاه:

$$\frac{a_n}{b_n} = 1 - \frac{(1/n)^2}{3!} + \frac{(1/n)^4}{5!} - \dots$$

و بنابراین،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

که ناصفر و متناهی است. اما Σb_n واگراست. (آزمون p با $p=1$)

در نتیجه به استناد قضیه ۲۵.۲، سری Σa_n نیز واگراست.

حل (د): در این جا $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \tan\frac{1}{n}$. به استناد بسط تابع تانژانت،

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}[\frac{1}{n} + \frac{(1/n)^3}{3} + \frac{2}{15}(\frac{1}{n})^5 + \dots] = \frac{1}{n\sqrt{n}}[1 + \frac{(1/n)^2}{3} + \frac{2}{15}(\frac{1}{n})^4 + \dots]$$

حال، اگر $b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ آنگاه:

$$\frac{a_n}{b_n} = 1 + \frac{(1/n)^2}{3} + \frac{2}{15}(\frac{1}{n})^4 + \dots$$

و بنابراین،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

که ناصفر و متناهی است. اما سری Σb_n همگرااست. (آزمون p با $p = \frac{3}{2}$)

در نتیجه، سری Σa_n به استناد قضیه ۲۵.۲ ، نیز همگرا می‌باشد.

حل (ه): در این جا $a_n = \frac{1}{n} - \text{Log}(\frac{n+1}{n})$ به استناد بسط تابع $\text{Log}(1+x)$ ،

$$a_n = \frac{1}{n} - \text{Log}(1+\frac{1}{n})$$
$$= \frac{1}{n} - [\frac{1}{n} - \frac{(1/n)^2}{2} + \frac{(1/n)^3}{3} - \dots]$$
$$= \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \dots = \frac{1}{n^2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n} + \dots)$$

حال، اگر $b_n = \frac{1}{n^2}$ آنگاه:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3n} + \dots$$

و بنابراین،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$$

که ناصفر و متناهی است. اما سری Σb_n همگرااست. (آزمون p با $p=2$)در نتیجه به استناد قضیه ۲۵.۲ سری Σa_n نیز همگرااست.

مثال ۱۰: در مورد همگرایی سریهای زیر بحث کنید:

(الف): $\frac{1}{1\times2\times3} + \frac{3}{2\times3\times4} + \frac{5}{3\times4\times5} + \dots$

(ب): $\frac{2^p}{1^q} + \frac{3^p}{2^q} + \frac{4^p}{3^q} + \dots$

حل (الف): در این جا، $a_n = \dfrac{(\text{جمله } n\text{ام } ۱،۳،۵،...)}{(\text{جمله } n\text{ام } ۱،۲،۳،...)\,(\text{جمله } n\text{ام } ۲،۳،...)\,(\text{جمله } n\text{ام } ۳،۴،...)}$

بنابراین، $a_n = \dfrac{۲n-۱}{n(n+۱)(n+۲)}$

حال، $b_n = \dfrac{۱}{n^۲}$ انتخاب می‌کنیم. (زیرا، $p = ۳-۱ = ۲$)

از این رو، $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{n^۲(۲n-۱)}{n(n+۱)(n+۲)} = \dfrac{n^۲\,n(۲-۱/n)}{n\,n^۲(۱+۱/n)(۱+۲/n)} = \dfrac{(۲-۱/n)}{(۱+۱/n)(۱+۲/n)}$

و $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{۲}{۱\times۱} = ۲$

که ناصفر و متناهی است. اما، سری Σb_n همگراست. (آزمون p با $p=۲$) در نتیجه به استناد قضیه ۲۵.۲، سری Σa_n نیز همگراست.

حل (ب): در این جا $a_n = \dfrac{(n+۱)^p}{n^q}$

باید $b_n = \dfrac{۱}{n^{q-p}}$ انتخاب کنیم. آن گاه: $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{n^{q-p}(n+۱)^p}{n^q} = \dfrac{n^{q-p}\,n^p(۱+۱/n)^p}{n^q}$

یا $\dfrac{a_n}{b_n} = (۱+۱/n)^p$

و بنابراین، $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = ۱$

که ناصفر و متناهی است.

اما، سری Σb_n همگراست اگر و فقط اگر $q-p>۱$ و واگرا می‌باشد اگر و فقط اگر $q-p<۱$. در نتیجه سری Σa_n نیز همگراست اگر و فقط اگر $q-p>۱$ و واگرا می‌باشد اگر و فقط اگر $q-p<۱$.

مثال ۱۱: نشان دهید که اگر $q>۰$، $q\neq۱$، سری $\Sigma\,(q^{۱/n}-۱)$ واگراست.

حل: در این جا $a_n = q^{۱/n}-۱$. فرض می‌کنیم $q>۱$. در این صورت، هر a_n مثبت است.

با انتخاب $b_n = \dfrac{۱}{n}$، داریم: $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{q^{۱/n}-۱}{۱/n} =$

و بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^{۱/n}-۱}{۱/n} = \operatorname{Log} q$

که ناصفر و متناهی است.

چون سری Σb_n واگراست، به استناد قضیه ۲۵.۲ ، سری Σa_n نیز واگرا می‌باشد.

تبصره: اگر $q<1$، آنگاه Σa_n یک سری باجمل منفی است. بنابراین، $\Sigma(-a_n)$ یک سری باجمل مثبت خواهد بود که اگر مانند بالا عمل نماییم، نتیجه می‌گیریم که سری $\Sigma(-a_n)$ واگرا به ∞ است. در نتیجه، سری Σa_n نیز واگرا خواهد بود. (به $-\infty$)

مثال ۱۲: در مورد همگرایی سریهای زیر بحث کنید:

(الف) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\text{Log } n)^{15}}{n^{5/4}}$$

(ب) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+5}{2n^2+1}(\text{Log}n)^{-5/4}$$

حل (الف): داریم: $$a_n = \frac{(\text{Log } n)^{15}}{n^{5/4}}$$

از مقایسه این سری با سری ، $\Sigma \frac{1}{n^p(\text{Log } n)^q}$ نتیجه می‌شود که $p=\frac{5}{4}>1$ ، $q=-15$ بنابراین به استناد قضیه ۲۷.۲ ، سری Σa_n همگرا میباشد.

حل (ب): در این جا، $$a_n = \frac{n+5}{(2n^2+1)(\text{Log}n)^{5/4}}$$

از این رو، $b_n = \frac{1}{n(\text{Log}n)^{5/4}}$ انتخاب می‌کنیم. (زیرا $p=2-1=1$) آن گاه:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{2n^2+1} \times \frac{1}{(\text{Log}n)^{5/4}} \times n(\text{Log}n)^{5/4}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+5/n)\times n}{n^2(1/n^2+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+5/n)}{1/n^2+2} = \frac{1}{2}$$

اما، به موجب قضیه ۲۷.۲، سری Σb_n همگراست. در نتیجه، به استناد قضیه ۲۵.۲ سری Σa_n نیز همگرا می‌باشد.

مثال ۱۳: در مورد همگرایی سریهای زیر بحث کنید:

(الف) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\text{Log Log } n)^{\text{Log } n}}$

(ب) $\sum_{n=3}^{\infty} r^{\text{Log } n}$

حل (الف): اگر فرض کنیم $y = (\text{Log Log } n)^{\text{Log } n}$ آن گاه

$$\text{Log } y = \text{Log}(\text{Log Log} n)^{\text{Log } n} = \text{Log } n\ (\text{Log Log Log} n)$$
$$= (\text{Log Log Log } n)(\text{Log } n) = \theta \text{ Log } n$$

که درآن $\theta = \text{Log Log Log } n$ بنابراین، $y = n^{\theta}$.

اگر فرض کنیم $a_n = \frac{1}{(\text{Log Log} n)^{\text{Log } n}}$، خواهیم داشت: $a_n = \frac{1}{n^{\theta}}$

چون: $\lim_{n\to\infty} \theta = \lim_{n\to\infty} \text{Log Log Log } n = \infty$

در نتیجه یک عدد طبیعی مانند m موجود است به طوری که به ازای هر $n \geq m$، $\theta \geq 2$. در این صورت: به ازای هر $n \geq m$، $a_n = \frac{1}{n^{\theta}} \leq \frac{1}{n^2}$

اما، سری $\Sigma \frac{1}{n^2}$ همگرا می‌باشد. (آزمون p با $p=2$) در نتیجه، سری $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ نیز همگرا می‌باشد. (آزمون مقایسه)

حل (ب): از روابط

$$\text{Log } n \text{ Log } r = \text{Log } r \text{ Log } n$$
$$\text{Log } (r)^{\log n} = \text{Log } (n)^{\log r}$$
$$r^{\log n} = n^{\log r}$$

نتیجه می گیریم که:

$$\Sigma r^{\log n} = \Sigma n^{\log r}$$
$$= \Sigma \frac{1}{n^{-\log r}}$$

از این رو، سری $\Sigma r^{\log n}$ همگراست اگر و فقط اگر $-\text{Log } r > 1$. (آزمون p با $p = -\text{Log } r$) نامساوی $-\text{Log } r > 1$ معادل $\text{Log } r < -1$ یا $r < e^{-1}$ است. لذا، سری $\Sigma r^{\log n}$ همگرااست فقط و فقط وقتی که $r < \frac{1}{e}$.

۲۹.۲ بخش بیست و نهم

آزمون ریشه کوشی

قضیه: اگر Σa_n یک سری با جمل مثبت باشد، آن‌گاه Σa_n همگراست در صورتی که: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n^{1/n} < 1$. و واگراست در صورتی که $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n^{1/n} > 1$

برهان حالت اول: فرض می‌کنیم $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n^{1/n} < 1$

$r > 0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n^{1/n} < r < 1$

آن‌گاه، عددی طبیعی مانند k موجود است به طوری که، به ازای هر $n \geq k$، $a_n^{1/n} < r$

یا، به ازای هر $n \geq k$، $a_n < r^n$

چون $0 < r < 1$، سری هندسی Σr^n همگراست. لذا به استناد آزمون مقایسه، سری Σa_n نیز همگرا می‌باشد.

برهان حالت دوم: فرض می‌کنیم $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n^{1/n} > 1$. در این صورت، به استناد تعریف حد زبرین به ازای بی‌نهایت n، $(a_n)^{1/n} > 1$. از این رو، به ازای بی نهایت n، $a_n > 1$.

لذا، $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. در نتیجه، شرط لازم برای همگرایی برقرار نیست و سری Σa_n واگرا است.

تبصره: اگر $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n^{1/n} = 1$، آزمون ریشه کوشی کارساز نیست.

شکل عملی آزمون ریشه کوشی:

قضیه: فرض کنید Σa_n یک سری باجمل مثبت باشد و $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = L$. آن‌گاه Σa_n همگراست در صورتی که $L < 1$ و واگراست در صورتی که $L > 1$. به ازای $L = 1$ آزمون کارساز نیست.

برهان: چون $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = L$، به ازای هر عدد مثبت مانند ε عددی طبیعی مانند m موجود است به طوری که به ازای هر $n \geq m$، $|(a_n)^{1/n} - L| < \varepsilon$

یا (۱) به ازای هر $n \geq m$، $L - \varepsilon < (a_n)^{1/n} < L + \varepsilon$

بالاخص ، به ازای هر $n \geq m$ ، $(a_n)^{1/n} > L-\varepsilon$

که از آن نتیجه می‌شود: (۲) به ازای هر $n \geq m$ ، $a_n > (L-\varepsilon)^n$

حالت اول: $L>1$. باید ثابت کنیم که Σa_n واگرا می‌باشد. $\varepsilon>0$ را طوری انتخاب می‌کنیم $L-\varepsilon>1$. در این صورت سری هندسی $\Sigma(L-\varepsilon)^n$ واگرا می‌شود. آنگاه، از آزمون مقایسه نتیجه می‌شود که سری Σa_n نیز واگرا می‌باشد.

حالت دوم: $L<1$. باید ثابت کنیم که Σa_n همگرا می‌باشد. از (۱) نتیجه می‌شود که:

به ازای هر $n \geq m$ ، $(a_n)^{1/n} < L+\varepsilon$

یا ، (۳) به ازای هر $n \geq m$ ، $(a_n) < (L+\varepsilon)^n$

چون $L<1$ ، ε مثبت را می‌توان طوری انتخاب کرد که $L+\varepsilon<1$. در این صورت، سری هندسی $\Sigma(L+\varepsilon)^n$ همگرا می‌شود. آنگاه از (۳)، به استناد آزمون مقایسه، لازم می‌آید که سری Σa_n نیز همگرا می‌باشد.

حالت سوم: $L=1$ باید ثابت کنیم که آزمون ریشه کوشی کارساز نیست.

فرض می‌کنیم $a_n = \frac{1}{n^p} = n^{-p}$. ملاحظه می‌کنیم که:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}(n^{-p})^{1/n} = \lim_{n\to\infty}(n^{1/n})^{-p} = (1)^{-p} = 1$$

اما می‌دانیم که سری $\Sigma a_n = \Sigma\frac{1}{n^p}$ همگراست اگر و فقط اگر $p>1$، و واگراست اگر و فقط اگر $p\leq 1$. بنابراین ، آزمون ریشه کوشی موثر واقع نمی‌شود.

موارد استفاده آزمون ریشه کوشی

اگر a_n شامل $n!$ نبوده و توان هر عامل a_n برابر n و یا مضربی از n باشد، آزمون ریشه کوشی به کار می‌رود.

مثال ۱: نشان دهید که سری $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n(\frac{1}{2})^n$ همگرا می‌باشد.

حل: در این جا $a_n = (1+\frac{1}{n})^n \cdot (\frac{1}{2})^n$. بنابراین $(a_n)^{1/n} = (1+\frac{1}{n}) \cdot \frac{1}{2}$

در نتیجه ، $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = (1+0)\frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$

لذا به استناد آزمون ریشه، سری Σa_n همگرا می‌باشد.

مثال ۲: در مورد همگرایی سری $\Sigma\frac{(n-\text{Log}n)^n}{2^n.n^n}$ بحث کنید.

حل: در این جا $a_n = \frac{(n-\text{Log}n)^n}{2^n.n^n}$ بنابراین ، $(a_n)^{1/n} = \frac{n-\text{Log}n}{2n} = \frac{1}{2}(1-\frac{\text{Log}n}{n})$

در نتیجه ، $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = \frac{1}{2}[1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\text{Log}n}{n}] = \frac{1}{2}[1-0] = \frac{1}{2} < 1$

(در حدگیری از قاعده هوپیتال استفاده شده است.)لذا به استناد آزمون ریشه کوشی سری Σa_n همگرااست.

مثال ۳: در مورد همگرایی سری زیر بحث کنید.

$$(\frac{2^2}{1^2}-\frac{2}{1})^{-1} + (\frac{3^3}{2^3}-\frac{3}{2})^{-2} + (\frac{4^4}{3^4}-\frac{4}{3})^{-3} + \dots$$

حل: ملاحظه می‌کنیم که:

$$a_n = [\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} - \frac{n+1}{n}]^{-n}$$

$$a_n = [(\frac{n+1}{n})^{n+1} - \frac{n+1}{n}]^{-n}$$

$$(a_n)^{1/n} = [\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} - \frac{n+1}{n}]^{-1}$$

$$= [(1+\frac{1}{n})^{n+1} - (1+\frac{1}{n})]^{-1} = [(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n}) - (1+\frac{1}{n})]^{-1}$$

و $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = [e(1)-1]^{-1} = \frac{1}{e-1} < 1$

بنابراین، به استناد آزمون ریشه کوشی، سری Σa_n همگراست.

مثال ۴: در مورد همگرایی سری مقابل بحث کنید. $\Sigma(1+\frac{1}{\sqrt{n}})^{-n^{\frac{3}{2}}}$

حل: داریم: $a_n = (1+\frac{1}{\sqrt{n}})^{-n^{\frac{3}{2}}}$

بنابراین : $(a_n)^{\sqrt{n}} = [(1+\frac{1}{\sqrt{n}})^{-n^{\frac{3}{2}}}]^{\frac{1}{n}} = (1+\frac{1}{\sqrt{n}})^{-n^{\frac{1}{2}}} = [(1+\frac{1}{\sqrt{n}})^{\sqrt{n}}]^{-1}$

و در نتیجه $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{\sqrt{n}})^{\sqrt{n}}]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$

لذا به استناد آزمون ریشه کوشی، سری Σa_n همگرا می‌باشد.

مثال ۵: در مورد همگرایی سریهای زیر بحث کنید:

(الف) $\Sigma(\text{Log}\, n)^{-n}$

(ب) $\sum e^{\sqrt{n}}.r^n \quad , r>0$

(ج) $\sum e^{-\sqrt{n}}.r^n \quad , r>0$

حل (الف): با فرض $a_n = (\text{Log } n)^{-n}$ ، ملاحظه می‌کنیم که

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}[(\text{Log}n)^{-n}]^{1/n} = \lim_{n\to\infty}(\log n)^{-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\text{Log}n)} = 0<1$$

بنابراین، سری $\sum(\text{Log}n)^{-n}$ همگرا می‌باشد. (آزمون ریشه کوشی)

حل (ب): با فرض $a_n = e^{\sqrt{n}}.r^n$ ، که در آن $r>0$ ، ملاحظه می‌کنیم که:

$$(a_n)^{1/n} = (e^{\sqrt{n}})^{1/n}.(r^n)^{1/n} = e^{1/\sqrt{n}}.r$$

و

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{1/\sqrt{n}}.r = e^0 .r = r$$

در نتیجه، از آزمون ریشه کوشی نتیجه می‌شود که سری فوق همگراست در صورتی که $r<1$ ، و واگراست در صورتی که $r>1$.

اگر $r=1$ آن‌گاه $a_n = e^{\sqrt{n}}$ و بنابراین،

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e^{\sqrt{n}} = e^{\infty} = \infty \neq 0$$

چون شرط لازم برای همگرایی برقرار نیست، سری $\sum e^{\sqrt{n}}$ واگرا می‌باشد.

سرانجام، نتیجه می‌شود که سری فوق همگرا است اگر و فقط اگر $r<1$.

حل (ج): با فرض $a_n = e^{-\sqrt{n}} . r^n$ ، که درآن $r>0$ ، ملاحظه می‌کنیم که:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}(e^{-\sqrt{n}}.r^n)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}(e^{-\sqrt{n}})^{1/n}.r=\lim_{n\to\infty}e^{-1/\sqrt{n}}.r=e^0.r=r$$

بنابراین، به استناد آزمون ریشه کوشی، سری $\sum a_n$ همگرااست در صورتی که $r<1$ و واگرااست در صورتی که $r>1$.

اگر $r=1$ آن‌گاه $a_n = e^{-\sqrt{n}} = \frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$.

اما

$$e^{\sqrt{n}}=1+\sqrt{n}+\frac{n}{2!}+\frac{n^{3/2}}{3!}+\frac{n^2}{4!}+\ldots > \frac{n^2}{4!}$$

(در این رابطه از بسط $e^x = ۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\dots$ استفاده شده است)

از این رو، $\frac{۱}{e^{\sqrt{n}}} < \frac{۴!}{n^۲}$

چنان‌که می‌دانیم، سری $\Sigma\frac{۱}{n^۲}$ همگراست لذا به استناد آزمون مقایسه، سری Σa_n نیز همگرا است بنابراین: سری فوق همگرااست اگر $r\leq ۱$، و واگرا است اگر $r>۱$.

مثال ۶: در مورد همگرایی سریهای با جمل مثبت زیر بحث کنید:

(الف): $\Sigma n^{\alpha}.r^n$ (ب): $\Sigma n^n.r^n$

(ج): $\Sigma(\frac{n}{n+۱})^{n^۲}$ (د): $\Sigma(\frac{n+۱}{۳n})^n$

(ه): $\Sigma q^{n^۲}.r^n$

حل (الف): بافرض $a_n = n^{\alpha}.r^n$ ، ملاحظه می کنیم که:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}(n^{\alpha}.r^n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}(n)^{\alpha/n}.\lim_{n\to\infty}(r^n)^{1/n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}(n^{1/n})^{\alpha}.r = ۱^{\alpha}.r = r$$

لذا به استناد آزمون ریشه کوشی، سری Σa_n همگرااست در صورتی که $r<۱$، و واگرا است در صورتی که $r>۱$. اما اگر $r=۱$ آنگاه: $a_n = n^{\alpha} = \frac{۱}{n^{-\alpha}}$.

در این حالت، Σa_n همگرااست اگر و فقط اگر، $-\alpha>۱$ یا $\alpha<-۱$.

حل (ب): بافرض $a_n = n^n.r^n$ ، که در آن $r>۰$ ، داریم:

$$(a_n)^{1/n} = n.r$$

و

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} nr = \infty > ۱$$

در نتیجه به استناد آزمون ریشه کوشی، سری فوق واگرااست.

حل (ج): با فرض $a_n = (\frac{n}{n+۱})^{n^۲}$ ، داریم:

$$a_n^{1/n} = (\frac{n}{n+۱})^n = (\frac{۱}{۱+1/n})^n = \frac{۱}{(۱+1/n)^n}$$

و

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = \frac{۱}{e} < ۱$$

در نتیجه، سری Σa_n همگرااست. (آزمون ریشه کوشی) .

حل (د): با فرض $a_n = (\frac{n+1}{3n})^n$ ، داریم: $(a_n)^{1/n} = \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3}(1+1/n)$

و $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = \frac{1}{3} < 1$

در نتیجه سری فوق همگرااست. (آزمون ریشه کوشی)

حل (ه): با فرض $a_n = q^{n^2}.\, r^n$ ، که درآن $r>0$ داریم: $(a_n)^{1/n} = q^n.\, r$

بنابراین:
$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = \begin{cases} 0 \text{ ، اگر } q<1 \\ \infty \text{ ، اگر } q>1 \end{cases}$$

از این رو به استناد آزمون ریشه کوشی، Σa_n همگرااست در صورتی که $q<1$ ، و واگراست در صورتی که $q>1$. زمانی که $q=1$ ، $a_n = r^n$. لذا Σa_n یک سری هندسی است. بنابراین، همگراست اگر و فقط اگر $r<1$.

مثال ۷: در مورد همگرایی سری مقابل بحث کنید: $\Sigma (\frac{n}{n+1})^n$

حل: با فرض $a_n = (\frac{n}{n+1})^n$ ، ملاحظه می‌کنیم که:

$$a_n = (\frac{n}{n+1})^n = (\frac{n}{n(1+1/n)})^n = (\frac{1}{1+1/n})^n$$

از این رو، $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} = \frac{1}{e} \neq 0$

بنابراین شرط لازم برای همگرایی برقرار نیست و نتیجه می‌گیریم که سری Σa_n واگرا است.

مثال ۸: در مورد همگرایی سریهای زیر بحث کنید:

(الف): $\Sigma \frac{x^n}{n^n}$ (ب): $\Sigma \frac{1}{(\text{Log Log } n)^n}$

(ج): $\Sigma\, 3^{-n-(-1)^n}$ (د): $\Sigma\, \text{Tan}^{-1}\frac{1}{n}$

حل (الف): با فرض $a_n = \frac{x^n}{n^n}$ داریم: $(a_n)^{1/n} = \frac{x}{n}$

لذا، $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{n} = 0 < 1$

بنابراین، Σa_n همگراست. (آزمون ریشه کوشی)

حل (ب): با فرض $a_n = \frac{۱}{(\text{Log Log n})^n}$ ، داریم: $(a_n)^{1/n} = \frac{۱}{\text{Log Logn}}$

از این رو، $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = ۰ < ۱$

بنابراین Σa_n همگراست. (آزمون ریشه کوشی).

حل (ج): با فرض $a_n = ۳^{-n-(-۱)^n}$ داریم: $(a_n)^{1/n} = \left[۳^{-n} \cdot ۳^{-(-۱)^n}\right]^{1/n}$

بنابراین: $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = ۳^{-۱} \cdot ۳^{۰} = \frac{۱}{۳} < ۱$

در نتیجه، به استناد آزمون ریشه، سری Σa_n همگرا می‌باشد.

حل (د): در این جا $a_n = \text{Tan}^{-۱}\frac{۱}{n}$

با استفاده از بسط $\text{Tan}^{-۱}x = x - \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} - \dots$ داریم:

$$(a_n)^{1/n} = \frac{۱}{n} - \frac{(1/n)^۳}{۳} + \frac{(1/۵)^۵}{۵} - \dots = \frac{۱}{n}\left[۱ - \frac{(1/n)^۲}{۳} + \frac{(1/n)^۴}{۵} - \dots\right]$$

از این رو، با انتخاب $b_n = \frac{۱}{n}$ ، ملاحظه می‌کنیم که: $\frac{a_n}{b_n} = ۱ - \frac{(1/n)^۲}{۳} + \frac{(1/n)^۴}{۵} - \dots$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = ۱$$

که ناصفر و متناهی است. اما، سری Σb_n واگراست. (آزمون p با $p=۱$) در نتیجه به استناد آزمون مقایسه، سری Σa_n نیز واگراست.

مثال ۹: همگرایی سری مقابل را بیازمایید: $\Sigma \frac{(۱+nx)^n}{n^n}$

حل: با فرض $u_n = \frac{(۱+nx)^n}{n^n}$ ، داریم: $(u_n)^{1/n} = \frac{۱+nx}{n} = \frac{۱}{n} + x$

$$\lim_{n\to\infty}(u_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n} + x = x$$

بنابراین به استناد آزمون ریشه کوشی، سری Σu_n همگراست در صورتی که $x<۱$ ، و واگراست در صورتی که $x>۱$. اگر $x=۱$ ، آزمون ریشه کوشی جواب نمی‌دهد.

اما به ازای $x=۱$ ، داریم: $u_n = \frac{(۱+n)^n}{n^n} = (۱+1/n)^n$

بنابراین: $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (1+1/n)^n = e \neq 0$

لذا، در این حالت، شرط لازم برای همگرایی سری مفروض برقرار نیست و سری واگرااست. در نتیجه، سری Σu_n همگرا است در صورتی که $x<1$ و واگرا است در صورتی که $x\geq 1$.

۲-۳۰: بخش سی‌ام

قضیه: اگر $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ ، یک دنباله ازاعداد مثبت باشد و $\lim_{n\to\infty} c_n = c > 0$ آنگاه دو سری با جمل مثبت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ یا هر دو همگرایند یا هر دو واگرا.

برهان: چون $\lim_{n\to\infty} c_n = c > 0$ به ازای $\varepsilon = \frac{c}{2}$ یک عدد صحیح مثبت مانند m موجود است به طوری که: به ازای هر $n\geq m$، $|c_n - c| < \frac{c}{2}$

که از آن نتیجه می‌شود: به ازای هر $n\geq m$، $-\frac{c}{2} < c_n - c < \frac{c}{2}$

یا: به ازای هر $n\geq m$، $\frac{c}{2} < c_n < \frac{3c}{2}$

با ضرب طرفین در a_n ($a_n > 0$)، داریم به ازای $n\geq m$، $\frac{c}{2}a_n < c_n a_n < \frac{3c}{2}a_n$

نامساویهای سمت راست نشان می‌دهند که اگر Σa_n همگرا باشد سری $\Sigma c_n a_n$ نیز همگرا می‌باشد.(آزمون مقایسه)

نامساویهای سمت چپ نشان می‌دهند که اگر Σa_n واگرا باشد سری $\Sigma c_n a_n$ نیز واگرااست (به استناد آزمون مقایسه) ازاین رو نتیجه می‌گیریم که سریهای Σa_n، $\Sigma c_n a_n$ یا هردو همگرا و یا واگرایند.

مثال ۱: نشان دهید که همگرایی سری با جمل مثبت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مستلزم همگرایی سری $\Sigma n^{1/n}.a_n$ است.

حل: دنباله $\{n^{1/n}\}$ یک دنباله با جمل مثبت است و $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1 > 0$

بنابراین، به استناد قضیه ۳۰.۲، سریهای Σa_n و $\Sigma n^{1/n}.a_n$ یا هر دو همگرایند و یا هر دو واگرا. اما، بنا به فرض، سری Σa_n همگرااست. در نتیجه سری $\Sigma n^{1/n}.a_n$ نیز همگرااست.

مثال ۲: نشان دهید که سری، $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots$ همگرا می‌باشد.

حل: در این جا $a_n = \frac{1}{2^{n-1}+1}$ ملاحظه می‌کنیم که (۱) به ازای هر n، $a_n = \frac{1}{2^{n-1}+1} < \frac{1}{2^{n-1}}$

اما، $\Sigma \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ است با $r=\frac{1}{2}$ و بنابراین، همگرااست. لذا، از (۱)، به استناد آزمون مقایسه، نتیجه می‌شود که سری Σa_n نیز همگرا می‌باشد.

۳۱.۲: بخش سی ویکم

قضیه: (آزمون کومر): فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{d_n\}$ دو دنباله از اعداد مثبت باشندو به ازای هر n، $t_n = d_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - d_{n+1}$ در این صورت،

۱- اگر $\underline{\text{Lim}}\ t_n > 0$، سری Σa_n همگرا می‌باشد.

۲- اگر $\overline{\text{Lim}}\ t_n < 0$ و سری $\Sigma \frac{1}{d_n}$ واگرا باشد، Σa_n واگرااست.

برهان: حالت اول: فرض می‌کنیم $\underline{\text{Lim}}\ t_n = \lambda > 0$ آنگاه به استناد تعریف حد زبرین، عددی طبیعی مانند k موجود است به طوریکه: به ازای هر $n \geq k$، $t_n > \frac{\lambda}{2}$

لذا، به استناد تعریف t_n، به ازای هر $n \geq k$، $d_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - d_{n+1} > \frac{\lambda}{2}$

یا (۱) به ازای هر $n \geq k$، $d_n a_n - a_{n+1}\ d_{n+1} > \frac{1}{2}\lambda a_{n+1}$

اگر فرض کنیم $n > k$، نامساویهای زیر برقرارند:

$$d_k a_k - a_{k+1}\ d_{k+1} > \frac{1}{2}\lambda a_{k+1}$$

$$a_{k+1}\, d_{k+1} - a_{k+2}\, d_{k+2} > \frac{1}{2}\lambda a_{k+1}$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1}\, d_{n-1} - a_n\, d_n > \frac{1}{2}\lambda a_n$$

از جمع آنها خواهیم داشت:

$$a_n d_k > \frac{1}{2}\lambda(a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_n)$$

$$= \frac{1}{2}\lambda(\sigma_n - \sigma_k)\ ,\quad n > k$$

که در آن، $\sigma_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ بنابراین، $\frac{2a_k d_k}{\lambda} > \sigma_n - \sigma_k$ ، $n > k$

یا به ازای هر $n > k$، $\sigma_n < \frac{2}{\lambda} a_k d_k + \sigma_k$

یعنی، دنباله $\{\sigma_n\}$ کراندار است. لذا به استناد قضیه ۱۷.۲، سری Σa_n همگرااست.

حالت دوم: اگر $\overline{\text{Lim}}\ t_n<0$ باشد آنگاه عددی طبیعی مانند k موجود است به طوری که:

به ازای هر $n\geq k$ ، $t_n<0$

یا به استناد تعریف t_n ، به ازای هر $n\geq k$ ، $d_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-d_{n+1}<0$

که از آن نتیجه می شود، (۲) به ازای هر $n\geq k$ $a_nd_n<a_{n+1}d_{n+1}$

اگر $n>k$ ، نامساویهای زیر برقرارند: $a_kd_k<a_{k+1}d_{k+1}$

$$a_{k+1}d_{k+1}<a_{k+2}d_{k+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$a_{n-1}d_{n-1}<a_n.d_n$$

از ضرب آنها خواهیم داشت: $a_n>\frac{a_k.d_k}{d_n}=(a_k.d_k)\frac{1}{d_n}$

اکنون، چون که،بنا به فرض، سری $\Sigma\frac{1}{d_n}$ واگرااست، از آزمون مقایسه نتیجه می‌شود که سری Σa_n نیز واگرااست.

شکل عملی آزمون کومر: فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{d_n\}$ دو دنباله از اعداد مثبت باشند و

به ازای هر n ، $t_n=d_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-d_{n+1}$

در این صورت ۱ـ اگر $\text{Lim}\ t_n>0$ ، سری Σa_n همگراست.

۲ـ اگر $\text{Lim}\ t_n<0$ و سری $\Sigma\frac{1}{d_n}$ واگرا باشد، Σa_n واگرااست.

۳۲.۲: بخش سی ودوم

قضیه: (**آزمون دالامبر**): سری با جمل مثبت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرااست، در صورتی‌که $\underline{\text{Lim}}\ \frac{a_n}{a_{n+1}}>1$ و واگرااست در صورتی که $\underline{\text{Lim}}\ \frac{a_n}{a_{n+1}}<1$.

برهان: در آزمون کومر ، $\{d_n\}$ را دنباله ثابت $\{1\}$ می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$t_n=d_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-d_{n+1}=\frac{a_n}{a_{n+1}}-1 \qquad (1)$$

از این رو، به استناد آزمون کومر، سری Σa_n همگرااست در صورتی که $\underline{\text{Lim}}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>0$ یا

$\underline{\text{Lim}}\ \frac{a_n}{a_{n+1}}>1$ ، و واگراست در صورتی که $\overline{\text{Lim}}\ \frac{a_n}{a_{n+1}}<1$.
قضیه بالا را می‌توانیم مستقل از آزمون کومر، به طریق زیر، نیز اثبات کنیم.

حالت اول: فرض می‌کنیم $\underline{\text{Lim}}\ \frac{a_n}{a_{n+1}}>1$.

r را طوری انتخاب می‌کنیم که $\underline{\text{Lim}}\ \frac{a_n}{a_{n+1}}>r>1$. آنگاه عددی طبیعی مانند k موجود است به طوری‌که: به ازای هر $n\geq k$ ، $\frac{a_n}{a_{n+1}}>r$

یا ، به ازای هر $n\geq k$ ، $\frac{a_n}{a_{n+1}}>\frac{r^{n+1}}{r^n}=\frac{r^{\frac{1}{n}}}{r^{\frac{1}{n+1}}}$

از نامساوی $r>1$ نتیجه می‌شود $\frac{1}{r}<1$. از این رو، سری هندسی $\Sigma\frac{1}{r^n}=\Sigma(\frac{1}{r})^n$ همگراست.
در نتیجه، به استناد قضیه ۲۶.۲ ، سری Σa_n نیز همگراست.

حالت دوم: فرض می‌کنیم $\overline{\text{Lim}}\ \frac{a_n}{a_{n+1}}<1$.

r را طوری انتخاب می‌کنیم که $\frac{a_n}{a_{n+1}}<r<1$. آنگاه عددی طبیعی مانند k موجود است به طوری‌که: به ازای هر $n\geq k$ ، $\frac{a_n}{a_{n+1}}<r$

یا، به ازای هر $n\geq k$ ، $\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{r^{n+1}}{r^n}=\frac{r^{\frac{1}{n}}}{r^{\frac{1}{n+1}}}$

اما، نامساوی $r<1$ مستلزم $\frac{1}{r}>1$ است. از این رو، سری هندسی $\Sigma\frac{1}{r^n}=\Sigma(\frac{1}{r})^n$ واگراست.
درنتیجه، به استناد قضیه ۲۶.۲ سری Σa_n نیز واگراست.

شکل عملی آزمون نسبت دالامبر: فرض کنید Σa_n سری باجمل مثبت باشد و $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=L$ آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگراست در صورتی که $L>1$ و واگراست در صورتی که $L<1$. اگر $L=1$ آزمون نسبت کارساز نیست.

برهان: چون $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=L$ ، به ازای $\varepsilon>0$ مفروض یک عدد صحیح مثبت مانند m موجود است به طوری‌که: به ازای هر $n\geq m$ ، $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}-L\right|<\varepsilon$

که از آن نتیجه می‌شود: به ازای هر $n\geq m$ ، $-\varepsilon<\frac{a_n}{a_{n+1}}-L<\varepsilon$

یا به ازای هر $n \geq m$ ، $L-\varepsilon < \frac{a_n}{a_{n+1}} < L+\varepsilon$

لذا اگر $n>m$ ، نامساویهای زیر برقرارند:

$$L-\varepsilon < \frac{a_m}{a_{m+1}} < L+\varepsilon$$
$$L-\varepsilon < \frac{a_{m+1}}{a_{m+2}} < L+\varepsilon$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$L-\varepsilon < \frac{a_{n-1}}{a_n} < L+\varepsilon$$

از ضرب آنها خواهیم داشت:

$$(L-\varepsilon)^{n-m} < \frac{a_m}{a_n} < (L+\varepsilon)^{n-m} \quad ، \quad n>m \qquad (*)$$

با در نظر گرفتن طرف چپ نامساوی (*)

$$(L-\varepsilon)^{n-m} < \frac{a_m}{a_n} \quad ، \quad n>m$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$(L-\varepsilon)^n \cdot a_n < (L-\varepsilon)^m \cdot a_m \quad ، \quad n>m$$

یا

$$a_n < (L-\varepsilon)^m \cdot a_m \cdot \frac{1}{(L-\varepsilon)^n} \quad ، \quad n>m$$

حالت اول: $L>1$.

ε را طوری انتخاب می‌کنیم که $L-\varepsilon > 1$. در این صورت سری هندسی $\Sigma \frac{1}{(L-\varepsilon)^n}$ همگرااست. در نتیجه به استناد آزمون مقایسه، سری Σa_n نیز همگرا می‌باشد.

حال، طرف راست نامساوی (*) را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{a_m}{a_n} < (L+\varepsilon)^{n-m} \quad ، \quad n>m$$

از این نامساوی نتیجه می‌شود که:

$$a_n > \frac{(L+\varepsilon)^m}{(L+\varepsilon)^n} \cdot a_m \quad ، \quad n>m$$

حالت دوم: $L<1$.

ε را طوری انتخاب می‌کنیم که $L+\varepsilon < 1$. در این صورت، سری هندسی $\Sigma \frac{1}{(L+\varepsilon)^n}$ واگرااست. در نتیجه به استناد آزمون مقایسه، سری Σa_n نیز واگرا می‌باشد.

تبصره: آزمون نسبت دالامبر در حالتی که $L=1$ کارساز نیست. یعنی، از این که $L=1$ نمی‌توان نتیجه گرفت که سری مفروض همگرااست یا واگرا.

به عنوان مثال، اگر $a_n = \frac{1}{n^p}$ آنگاه:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{n^p} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^p(1+1/n)^p}{n^p}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^p = (1+0)^p = 1$$

اما، سری Σa_n همگراست در صورتی که $p>1$. و واگرااست در صورتی که $p\leq 1$.

توجه: آزمون ریشه کوشی قویتر از آزمون نسبت دالامبر است. زیرا، اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ موجود باشد آنگاه، به استناد قضیه دوم کوشی در حدود، $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n}$ نیز موجود است و دو حد باهم برابرند. اما عکس این حکم برقرار نیست، یعنی، امکان دارد $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n}$ موجود باشد ولی $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ موجود نباشد.

مثال ۱: نشان دهید که سری $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ به ازای همه مقادیر متناهی $x>0$ همگرااست.

حل: با صرف نظر از جمله اول، داریم:

$$a_n = \frac{x^n}{n!}$$

با تبدیل n به $n+1$ ، داریم:

$$a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

بنابراین:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{x^n}{n!}\,\frac{(n+1)!}{x^{n+1}} = \frac{(n+1)}{x}$$

و

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\infty}{x} = \infty > 1$$

در نتیجه به استناد آزمون نسبت، سری Σa_n به ازای همه مقادیر متناهی $x>0$ همگرا می‌باشد.

مثال ۲: نشان دهید که سری $\Sigma\frac{x^n}{n!}$ به ازای همه مقادیر x همگرای مطلق است.

حل: بافرض $a_n = \frac{x^n}{n!}$ داریم:

$$|a_n| = \frac{|x|^n}{n!}$$

با تبدیل n به $n+1$ داریم:

$$|a_{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

بنابراین:

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{|x|^n}{n!}\times\frac{(n+1)!}{|x|^{n+1}} = \frac{n+1}{|x|}$$

و $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \infty > 1$

در نتیجه، به استناد آزمون نسبت، سری $\Sigma |a_n|$ به ازای تمام مقادیر x همگرا می‌باشد.

مثال ۳: همگرایی سریهایی را که جمله nام آنها در زیر داده شده است بیازمایید:

(الف): $\frac{2^n . n!}{n^n}$ (ب): $\frac{3^n . n!}{n^n}$ (ج): $\frac{r^n}{3^n . n^2}$ ، $r>0$

حل (الف): فرض می‌کنیم: $a_n = \frac{2^n . n!}{n^n}$

با تبدیل n به n+۱ داریم: $a_{n+1} = \frac{2^{n+1} . (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$

بنابراین:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2^n . n!}{n^n} \times \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1} . (n+1)!} = \frac{1}{2} \times \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n (n+1)} = \frac{1}{2} \times \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{2}(1+1/n)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{e}{2} > 1$$

لذا، به استناد آزمون نسبت، سری Σa_n همگرااست.

حل (ب): در این جا، با فرض $a_n = \frac{3^n . n!}{n^n}$ ، داریم: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{e}{3} < 1$

بنابراین به استناد آزمون نسبت، سری Σa_n واگرااست .

حل (ج): در این جا:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{r^n}{3^n n^2} \times \frac{3^{n+1} (n+1)^2}{r^{n+1}} = \frac{1}{r} \times 3 \times \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{3}{r}(1+1/n)^2$$

و، در نتیجه، $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{3}{r}$

بنابراین، به استناد آزمون نسبت، سری Σa_n همگرااست در صورتی که $\frac{3}{r} > 1$ یا $r<3$، و واگرااست در صورتی که $\frac{3}{r} < 1$ یا $r>3$. به ازای $r=3$ ، داریم: $a_n = \frac{1}{n^2}$ در نتیجه، سری Σa_n در این حالت، همگرااست. (آزمون p با $p=2$).

مثال ۴: در مورد همگرایی سریهای زیر بحث کنید:

(الف): $\sum \frac{n^2}{n!}$ (ب): $\sum \frac{x^n}{n}$ ، $x>0$ (ج): $\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{x^2}{3\sqrt{2}}+\frac{x^4}{4\sqrt{3}}+\dots$

حل الف: با فرض $a_n=\frac{n^2}{n!}$ ، داریم:

$$a_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}$$

بنابراین:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n^2}{n!}\times\frac{(n+1)!}{(n+1)^2}=\frac{n^2\times(n+1)n!}{n!(n+1)^2}=\frac{n^2}{n+1}=\frac{n^2}{n(1+1/n)}=\frac{n}{1+1/n}$$

و ملاحظه می‌کنیم که:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\infty}{1+0}=\infty>1$$

لذا، به استناد آزمون نسبت، سری $\sum a_n$ همگراست.

حل (ب): با فرض $a_n=\frac{x^n}{n}$ ، داریم:

$$a_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

بنابراین ،

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{x^n}{n}\times\frac{n+1}{x^{n+1}}=\frac{n+1}{n}\times\frac{1}{x}=(1+1/n)\frac{1}{x}$$

و ملاحظه می‌کنیم که:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{x}$$

از این رو، سری $\sum a_n$ همگراست در صورتی که $\frac{1}{x}>1$ یا $x<1$ و واگراست در صورتی که $\frac{1}{x}<1$ یا $x>1$. (آزمون نسبت).

اگر $\frac{1}{x}=1$ ، آزمون نسبت جواب نمی‌دهد. به ازای $x=1$ داریم: $a_n=\frac{1}{n}$، و نتیجه می‌گیریم که سری $\sum a_n$ در این حالت واگراست. (آزمون p با $p=1$).

بنابراین: سری $\sum a_n$ همگراست در صورتی که $x<1$ ، و واگراست در صورتی که $x\geq 1$

حل (ج): ملاحظه می‌کنیم: $a_n=\frac{x^{2n-2}}{(n+1)\sqrt{n}}$

$$a_{n+1}=\frac{x^{2n}}{(n+2)\sqrt{n+1}}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{x^{2n-2}}{(n+1)\sqrt{n}}\times\frac{(n+2)\sqrt{n+1}}{x^{2n}}=\frac{(n+2)}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}\times\frac{1}{x^2}=\frac{n(1+2/n)}{\sqrt{n}\sqrt{1+1/n}\sqrt{n}\,x^2}$$

یا

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1+2/n}{x^2\sqrt{1+1/n}}$$

در نتیجه ملاحظه می‌کنیم که: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{x^2}$

بنابراین، به استناد آزمون نسبت، سری Σa_n همگرااست در صورتی که $\frac{1}{x^2}>1$ یا $x^2<1$ ، و واگرااست در صورتی که $\frac{1}{x^2}<1$ یا $x^2>1$.

در حالاتی که $x^2=1$ آزمون نسبت کارساز نیست. در این حالتها، $a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$. با فرض $b_n=\frac{1}{n^{3/2}}$ ملاحظه می‌کنیم که

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{n^{3/2}}{(n+1)\sqrt{n}}=\frac{n}{n+1}=\frac{n}{n(1+1/n)}=\frac{1}{1+1/n}$$

و $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{1+0}=1$

که ناصفر و متناهی است.

ولی، سری Σb_n همگراست. (آزمون p با $p=\frac{3}{2}$) بنابراین ، سری Σa_n نیز همگرا می‌باشد. (آزمون مقایسه)

۳۳.۲: بخش سی و سوم

نکات مهم در مورد سریهای با جمل مثبت

۱) اگر a_n به صورت حاصل ضرب عوامل نباشد، معمولا، آزمون مقایسه را به کار می‌بریم.

۲) اگر در هر مرحله از بررسی همگرایی یک سری باجمل مثبت، بتوانیم ثابت کنیم که $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$ فورا نتیجه می‌گیریم که سری مفروض واگرااست.

۳) اگر a_n به صورت حاصل‌ضرب عوامل باشد و توان هر عامل مضربی از n باشد، آزمون ریشه کوشی را به کار می‌بریم.

۴) اگر a_n به صورت حاصل‌ضرب عوامل باشد و آزمونهای قبلی موثر واقع نشود، آزمون نسبت را به کار می‌بریم.

۵) اگر آزمون نسبت کارساز نباشد، یعنی $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1$، به a_n بر می‌گردیم و از آزمونهای دیگر، نظیر آزمون گاوس و آزمون لگاریتمی، استفاده می‌کنیم.

مثال ۵: در مورد همگرایی یا واگرایی سریهای زیر بحث کنید:

(الف): $\sum \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}} \cdot x^n$ ، $x>0$

(ب): $\sum \frac{n}{n^2+1} \cdot x^n$ ، $x>0$

(ج): $\sum \sqrt{\frac{n+1}{n^3+1}} \cdot x^n$ ، $x>0$

(د): $x + \frac{3}{5}x^2 + \frac{8}{10}x^3 + \frac{15}{17}x^4 + \dots + \frac{n^2-1}{n^2+1} \cdot x^n + \dots$ ، $x>0$

حل (الف): با فرض $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}} \cdot x^n$ ، داریم:

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+1}} x^{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+2n+2}} x^{n+1}$$

در نتیجه،

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}} x^n \times \frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{\sqrt{n+1}} \cdot x^{n+1}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{1+1/n^2}} \times \frac{n \times \sqrt{1+2/n+2/n^2}}{\sqrt{n}\sqrt{1+1/n}} \times \frac{1}{x}$$

و

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+2/n+2/n^2}}{\sqrt{1+1/n^2}\sqrt{1+1/n}} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

از این رو سری $\sum a_n$ همگرا است در صورتی که $\frac{1}{x}>1$ یا $x<1$، و واگرا است در صورتی که $\frac{1}{x}<1$ یا $x>1$. (آزمون نسبت).

وقتی $x=1$ آزمون نسبت جواب نمی‌دهد. اما، به ازای $x=1$ داریم: $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}}$

با فرض $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$ ملاحظه می کنیم که:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{n\sqrt{1+1/n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}}$$

و بنابراین :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

که ناصفر و متناهی است. اما، سری $\sum b_n$ واگرا است. (آزمون p با $p=\frac{1}{2}$) بنابراین، سری $\sum a_n$ نیز واگرا می‌باشد. درنتیجه، سری $\sum a_n$ همگرا است در صورتی $x<1$، و واگرا است در صورتی که $x\geq 1$

حل (ب): را به متعلم واگذار می‌کنیم. [جواب: Σa_n همگراست در صورتی که $x<1$ ، و واگراست در صورتی که $x\geq 1$.]

حل (ج): با فرض $a_n = \sqrt{\frac{n+1}{n^3+1}}\,.\,x^n$ ، داریم:

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{n+2}{(n+1)^3+1}}\,.\,x^{n+1} = \sqrt{\frac{n+2}{n^3+3n^2+3n+2}}\,.\,x^{n+1}$$

بنابراین ،

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \sqrt{\frac{n+1}{n^3+1}}\,.\,x^n\,.\,\sqrt{\frac{n^3+3n^2+3n+2}{n+2}}\,.\,\frac{1}{x^{n+1}}$$

و

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+1/n}{1+1/n^3}}\,.\,\sqrt{\frac{1+3/n+3/n^2+2/n^3}{1+2/n}}\,.\,\frac{1}{x}$$

$$= \sqrt{\frac{1+0}{1+0}}\times\sqrt{\frac{1+0}{1+0}}\times\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

لذا، سری Σa_n همگراست در صورتی که $\frac{1}{x}>1$ یا $x<1$ و واگراست در صورتی که $\frac{1}{x}<1$ یا $x>1$. (آزمون نسبت). اگر $x=1$ ، آزمون نسبت جواب نمی‌دهد. اما به ازای $x=1$ داریم:

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^3+1}}$$

$b_n = \frac{1}{n}$ انتخاب می‌کنیم . (زیرا $p=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$)

آنگاه:

$$\frac{a_n}{b_n} = n\sqrt{\frac{n+1}{n^3+1}} = n\sqrt{\frac{n(1+1/n)}{n^3(1+1/n^3)}} = \sqrt{\frac{1+1/n}{1+1/n^3}}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \sqrt{\frac{1+0}{1+0}} = 1$$

اما، سری Σb_n واگراست. (آزمون p با $p=1$) در نتیجه، سری Σa_n نیز واگراست (آزمون مقایسه) بنابراین ، سری Σa_n همگراست در صورتی که $x<1$ و واگراست در صورتی که $x\geq 1$.

حل (ج): با فرض $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}\,.\,x^n$ ، داریم:

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2+1}\,.\,x^{n+1} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+2}\,.\,x^{n+1}$$

ازاین رو،

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^2-1}{n^2+1}\,.\,x^n\,.\,\frac{n^2+2n+2}{(n^2+2n)\,.\,x^{n+1}}$$

$$= \frac{n^2(1-1/n^2)}{n^2(1+1/n^2)} \cdot \frac{n^2(1+2/n+2/n^2)}{n^2(1+2/n)} \cdot \frac{1}{x}$$

و درنتیجه :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-1/n^2)}{(1+1/n^2)} \cdot \frac{(1+2/n+2/n^2)}{(1+2/n)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

بنابراین سری Σa_n همگرااست در صورتی که $\frac{1}{x}>1$ یا $x<1$، وواگرااست در صورتی که $\frac{1}{x}<1$ یا $x>1$. (آزمون نسبت) .

اگر $x=1$، آزمون نسبت جواب نمی‌دهد. در این حالت داریم:

$$a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1} = \frac{n^2(1-1/n^2)}{n^2(1+1/n^2)} = \frac{1-1/n^2}{1+1/n^2}$$

و ملاحظه می‌کنیم که
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1-0}{1+0} = 1 \neq 0$$

بنابراین ، سری Σa_n واگرا می‌باشد.

مثال ۶: اگر $\alpha>0$ و $\beta>0$ نشان دهید که سری

$$1+\frac{(\alpha+1)}{(\beta+1)} + \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)}{(\beta+1)(2\beta+1)} + \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)(3\alpha+1)}{(\beta+1)(2\beta+1)(3\beta+1)} + \dots$$

همگرااست اگر $\beta>\alpha$ ، و واگرااست اگر $\alpha\geq\beta$

برهان : صرف نظر از جمله اول، داریم:
$$a_n = \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1) + \dots + (n\alpha+1)}{(\beta+1)(2\beta+1) + \dots + (n\beta+1)}$$

با تبدیل n به $(n+1)$ داریم:
$$a_{n+1} = \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1) \dots [(n+1)\alpha+1]}{(\beta+1)(2\beta+1) \dots [(n+1)\beta+1]}$$

بنابراین:
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1) \dots [n\alpha+1]}{(\beta+1)(2\beta+1) + \dots + [n\beta+1]} \times \frac{(\beta+1) \dots [(n+1)\beta+1]}{(\alpha+1) \dots [(n+1)\alpha+1]}$$

یا
$$= \frac{(n+1)\beta+1}{(n+1)\alpha+1} = \frac{n\beta+\beta+1}{n\alpha+\alpha+1} = \frac{n(\beta+\beta/n+1/n)}{n(\alpha+\alpha/n+1/n)} = \frac{\beta+\beta/n+1/n}{\alpha+\alpha/n+1/n}$$

در نتیجه:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta+\beta/n+1/n}{\alpha+\alpha/n+1/n} = \frac{\beta+0+0}{\alpha+0+0} = \frac{\beta}{\alpha}$$

بنابراین، به استناد آزمون نسبت دالامبر، سری Σa_n همگرااست در صورتی که $\frac{\beta}{\alpha}>1$ یا $\beta>\alpha$. و واگرا می‌باشد در صورتی که $\frac{\beta}{\alpha}<1$ یا $\beta<\alpha$.

اگر $\frac{\beta}{\alpha}=1$ ، آزمون نسبت جواب نمی‌دهد. دراین حالت داریم:

$$a_n = \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)\dots(n\alpha+1)}{(\alpha+1)(2\alpha+1)\dots(n\alpha+1)} = 1$$

و ملاحظه می‌کنیم که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$$

و در نتیجه، سری Σa_n در این حالت، واگراست.

بنابراین: سری Σa_n همگراست اگر $\beta>\alpha$، و واگراست اگر $\beta\leq\alpha$.

مثال ۷: در مورد همگرایی سری زیربحث کنید:

$$\frac{2}{1^2}x + \frac{3^2}{2^3}x^3 + \frac{4^3}{3^4}x^3 + \dots + \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}x^n + \dots$$

حل: با فرض $a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} . x^n$ داریم:

$$a_{n+1} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+2}} . x^{n+1}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)^n x^n}{n^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+1} . x^{n+1}} = \frac{n^n(1+1/n)\, n^{n+2}\, (1+1/n)^{n+2}}{n^{n+1}\,(1+2/n)^{n+1}\, n^{n+1}\, x}$$

$$= \frac{(1+1/n)^n\, (1/n+1)^n\, (1+1/n)^2}{(1+2/n)^n\,(1+2/n)\, x} = \frac{(1+1/n)^n\, (1+1/n)^n\, (1+1/n)^2}{[(1+2/n)^{n/2}]^2\,(1+2/n)\, x}$$

و ملاحظه می‌کنیم ،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{e . e . 1}{e^2 . 1 . x} = \frac{1}{x}$$

بنابراین، سری Σa_n همگراست اگر $x<1$ ، و واگراست اگر $x>1$. در حالتی که، $x=1$ ، آزمون نسبت جواب نمی‌دهد. در این حالت، داریم:

$$a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$$

با فرض $b_n = \frac{1}{n}$ خواهیم داشت:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{n . n^n(1+1/n)^n}{n^{n+1}} = (1+1/n)^n$$

و در نتیجه،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} (1+1/n)^n = e$$

که متناهی و ناصفر است. اما سری Σb_n واگراست. (آزمون p با $p=1$) بنابراین، سری Σa_n واگراست (آزمون مقایسه) در نتیجه، سری Σa_n همگراست اگر $x<1$ و واگراست اگر $x\geq 1$.

روش حل دیگر:

ملاحظه می‌کنیم که $(a_n)^{1/n} = \frac{(n+1)x}{n \cdot n^{1/n}} = \frac{1+1/n}{n^{1/n}} \cdot x$

از این رو، $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = 1 \cdot x = x$

بنابراین، سری Σa_n همگراست اگر $x<1$، و واگراست اگر $x>1$ (آزمون ریشه کوشی) اگر $x=1$ آزمون ریشه کوشی جواب نمی دهد و باید مانند بالا عمل کنیم.

مثال ۸: در مورد همگرایی سری زیربحث کنید:

$$1 + \frac{4}{3} + \frac{8}{10} + \dots + \frac{2^n}{n^2+1} + \dots$$

حل: با فرض $a_n = \frac{2^n}{n^2+1}$ داریم:

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1} = \frac{2^{n+1}}{n^2+2n+2}$$

بنابراین:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2^n}{n^2+1} \cdot \frac{n^2+2n+2}{2^{n+1}} = \frac{n^2(1+2/n+3/n^2)}{n^2(1+1/n^2) \cdot 2}$$

و در نتیجه:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2/n+3/n^2}{(1+1/n^2) \cdot 2} = \frac{1}{2} < 1$$

لذا به استناد آزمون نسبت، سری Σa_n واگراست.

مثال ۹: نشان دهید که سری $\Sigma \frac{2^n-2}{2^n+1} \cdot x^{n-1}$ که درآن $x>0$، همگراست اگر $x<1$، و واگراست اگر $x\geq 1$.

برهان: با فرض $a_n = \frac{2^n-2}{2^n+1} \cdot x^{n-1}$، داریم.

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}+1} \cdot x^n$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2^n-2}{2^n+1} \cdot x^{n-1} \cdot \frac{2^{n+1}+1}{(2^{n+1}-2) \cdot x^n}$$

$$= \frac{2^n(1-\frac{2}{2^n}) \cdot 2^{n+1} \cdot (1+\frac{1}{2^{n+1}})}{2^n(1+\frac{1}{2^n}) \cdot 2^{n+1} \cdot (1+\frac{2}{2^{n+1}})} \times \frac{1}{x}$$

لذا:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\frac{2}{2^n})(1+\frac{1}{2^{n+1}})}{(1+\frac{1}{2^n})(1-\frac{2}{2^{n+1}})x} = \frac{1}{x}$$

بنابراین ، سری Σa_n همگراست در صورتی که $x<1$ ، و واگراست در صورتی که $x>1$ (آزمون نسبت) و اگر $x=1$ ،آزمون نسبت جواب نمی‌دهد. در این حالت، داریم:

$$a_n = \frac{2^n-2}{2^n+1} = \frac{2^n(1-\frac{2}{2^n})}{2^n(1+\frac{1}{2^n})} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^n}}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1-0}{1+0} = 1 \neq 0$$

یعنی ، Σa_n واگراست. لذا ، سری Σa_n همگراست اگر $x<1$ و واگراست اگر $x\geq 1$.

مثال ۱۰: در مورد همگرایی سری $x^2(\text{Log}2)^q + x^3(\text{Log}3)^q + \dots$ بحث نمایید.

حل: اگر سری مفروض را به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ در نظر بگیریم، ملاحظه می‌کنیم که $a_n = x^n(\text{Log})^q$

بنابراین،

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{x^n(\text{Log})^q}{x^{n+1}[\text{Log}(n+1)]^q} = \frac{1}{x}\left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log}(n+1)}\right]^q$$

اما،

$$\frac{\text{Log } n}{\text{Log}(n+1)} = \frac{\text{Log } n}{\text{Log}(n(1+1/n))} = \frac{\text{Log } n}{\text{Log}n + \text{Log}(1+1/n)} = \frac{1}{1+\frac{\text{Log}(1+1/n)}{\text{Log}n}}$$

لذا،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{1+0}\right]^q = \frac{1}{x}$$

بنابراین، سری Σa_n همگراست اگر $x<1$ و واگراست اگر $x>1$ (آزمون نسبت).

اگر $x=1$ ، آزمون نسبت جواب نمی‌دهد. در این حالت، داریم: $a_n = (\text{Log}n)^q$

و بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\text{Log } n)^q = \infty \neq 0$$

درنتیجه، سری Σa_n واگرا می‌باشد. لذا سری Σa_n همگراست اگر $x<1$ و واگراست اگر $x\geq 1$

مثال ۱۱: در مورد همگرایی سریهای زیر به ازای $x>0$ و $a>0$ بحث نمایید.

(الف): $\Sigma \frac{a^n}{a^n + x^n}$ (ب): $\Sigma \frac{x^n}{x^n + a^n}$

حل الف : فرض می‌کنیم $u_n = \frac{a^n}{a^n + x^n}$ ، و سه حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $x=a$ ملاحظه می‌کنیم

$$u_n = \frac{a^n}{a^n+a^n} = \frac{a^n}{2a^n} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2} \neq 0$$

در نتیجه، سری Σu_n واگراست.

حالت دوم: $x<a$. دراین حالت ، $\frac{x}{a}<1$ لذا،

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n = 0$$

و

$$u_n = \frac{a^n}{a^n\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^n\right)} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^n}$$

بنابراین،

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{1+0} = 1 \neq 0$$

در نتیجه، سری Σu_n واگراست.

حالت سوم : $x>a$. دراین حالت ، $\frac{a}{x}<1$ لذا،

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{x}\right)^n = 0$$

$$u_n = \frac{a^n}{x^n\left[\left(\frac{a}{x}\right)^n+1\right]} = \frac{\left(\frac{a}{x}\right)^n}{\left(\frac{a}{x}\right)^n+1}$$

با فرض $v_n = \left(\frac{a}{x}\right)^n$ ملاحظه می‌کنیم که:

$$\frac{u_n}{V_n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{x}\right)^n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{V_n} = \frac{1}{0+1} = 1$$

که ناصفر و متناهی است. اما، سری هندسی $\Sigma v_n = \Sigma \left(\frac{a}{x}\right)^n$، که در آن $\left(\frac{a}{x}\right)<1$، همگراست. در نتیجه سری Σu_n نیز همگراست. (آزمون مقایسه) لذا ، سری Σu_n همگراست اگر $x>a$ ، و واگراست اگر $x\leq a$.

حل (ب): را به متعلم واگذار می‌کنیم. [جواب: به ازای $x<a$ همگراست و به ازای x a واگرا.]

مثال ۱۲: نشان دهید که سری $\Sigma \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ یا $\left(\Sigma \frac{1}{x^n+x^{-n}}\right)$ به ازای $x=1$ واگرا و به ازای سایر مقادیر مثبت x همگراست.

برهان: فرض می‌کنیم $a_n = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ و سه حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: $x<1$

فرض می‌کنیم $b_n = x^n$. آنگاه :

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{1+x^{2n}}$$

و در نتیجه، $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{1+0} = 0$

اما، سری هندسی $\Sigma b_n = \Sigma x^n$ ، که در آن $0<x<1$ ، همگرااست. لذا، سری Σa_n نیز همگرا می‌باشد. (آزمون مقایسه)

حالت دوم: $x>1$ در این حالت، داریم:

$$a_n = \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{x^n}{x^{2n}\left[(1/x)^{2n}+1\right]} = \frac{1}{x^n\left[(1/x)^{2n}+1\right]}$$

اگر $b_n = \frac{1}{x^n}$ اختیار شود آن‌گاه $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{(1/x)^{2n}+1}$

و در نتیجه، $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{0+1} = 1$

اما، سری هندسی $\Sigma b_n = \Sigma \left(\frac{1}{x}\right)^n$ ، که درآن $0<\frac{1}{x}<1$ ، همگرااست. لذا سری Σa_n نیز همگرا می‌باشد. (آزمون مقایسه)

حالت سوم: $x=1$ در این حالت داریم: $a_n = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

بنابراین، $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$

و در نتیجه می‌گیریم که سری Σa_n واگرااست.

مثال ۱۳: با یک مثال نشان دهید که آزمون ریشه کوشی قویتر از آزمون نسبت دالامبر است.

حل: سری $\frac{1}{2^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} \cdots$ را در نظر می‌گیریم. اگر a_n جمله nام سری باشد،

ملاحظه می‌کنیم که: $a_{2n-1} = \frac{1}{2^{2n-1}}$, $a_{2n} = \frac{1}{3^{2n}}$, $a_{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}}$

$$(a_{2n-1})^{\frac{1}{2n-1}} = \frac{1}{2} \quad , \quad (a_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_{2n-1})^{\frac{1}{2n-1}} = \frac{1}{2} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} (a_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{3}$$

و نتیجه می‌گیریم که: $\overline{\lim_{n\to\infty}} (a_n)^{1/n} = \frac{1}{2} < 1$

بنابراین، با استناد آزمون ریشه کوشی، سری Σa_n همگرااست.

اما، $\frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} = \frac{\left(\frac{1}{2^{2n-1}}\right)}{\left(\frac{1}{3^{2n}}\right)} = \frac{3^{2n}}{2^{2n-1}} = \frac{3 \cdot 3^{2n-1}}{2^{2n-1}} = 3\left(\frac{3}{2}\right)^{2n-1}$

و بنابراین : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} = \infty$

و همچنین: $\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} = \frac{3^{1/2n}}{2^{1/2n+1}} = \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$

و بنابراین: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} = 2(0) = 0$

و از این رو: $\overline{\lim} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \infty$ ، $\underline{\lim} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 0$

این نتایج نشان می‌دهند که آزمون نسبت در مورد این سری کارساز نیست. در تبصره بخش ۳۲ نیز به این نکته اشاره شده است.

مثال ۱۴: نشان دهید که که در اثبات همگرایی سری Σa_n با a_n زیر، آزمون ریشه کوشی موثر واقع می‌شود ولی آزمون نسبت دالامبر کارساز نیست

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \\ 2^{-n+2} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \end{cases}$$

برهان: بنا به فرض (۱) اگر n فرد باشد، $a_n = 2^{-n}$

(۲) اگر n زوج باشد، $a_n = 2^{-n+2}$

از (۱) نتیجه می‌شود که $a_{2n-1} = 2^{-(2n-1)}$, $a_{2n+1} = 2^{-(2n+1)}$

از (۲) نتیجه می‌شود که $a_{2n} = 2^{-2n+2}$

از این رو: ، $(a_{2n-1})^{\frac{1}{2n-1}} = [2^{-(2n-1)}]^{\frac{1}{2n-1}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

و $(a_{2n})^{\frac{1}{2n}} = [2^{-2n+2}]^{\frac{1}{2n}} = 2^{-1+1/n}$

لذا: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{2n-1})^{\frac{1}{2n-1}} = \frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{2n})^{\frac{1}{2n}} = 2^{-1+0} = \frac{1}{2}$

درنتیجه: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = \frac{1}{2} < 1$

بنابراین به استناد آزمون ریشه کوشی، سری Σa_n همگرااست.

اما، $\frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} = \frac{2^{-2n+1}}{2^{-2n+2}} = \frac{1}{2}$

لذا، $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} = \frac{1}{2}$

همچنین: $\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} = \frac{2^{-2n+2}}{2^{-2n-1}} = 2^3 = 8$

و بنابراین: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} = 8$

در نتیجه $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 8$ و $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}$ که، نشان می‌دهند که آزمون نسبت دالامبر کارساز نیست.

مثال ۱۵: در مورد همگرایی سریهای زیر بحث کنید:

(الف): $a+b+a^2+b^2+\dots$ ، $a>0$, $b>0$

(ب): $1+a+ab+a^2b+a^2b^2+\dots$ ، $a>0$ ، $b>0$ ، $ab<1$

حل (الف): اگر جمله nام سری را u_n بنامیم، ملاحظه می‌کنیم که

$u_{2n-1} = a^n \qquad u_{2n} = b^n$

از این رو، داریم:

$(u_{2n-1})^{\frac{1}{2n-1}} = a^{\frac{n}{2n-1}} = a^{\frac{1}{2-1/n}}$

$(u_{2n})^{\frac{1}{2n}} = b^{\frac{n}{2n}} = b^{\frac{1}{2}}$

بنابراین، $\lim\limits_{n\to\infty} (u_{2n-1})^{\frac{1}{2n-1}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \qquad (1)$

و: $\lim\limits_{n\to\infty} (u_{2n})^{\frac{1}{2n}} = b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b} \qquad (2)$

حال، اگر $a<1$ و $b<1$ آنگاه $\sqrt{a}<1$ ، $\sqrt{b}<1$ و از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که:

$\overline{\lim}\, (u_n)^{1/n} < 1$

لذا با استناد به آزمون ریشه کوشی، Σu_n همگرااست.

اگر $a\geq 1$ یا $b\geq 1$ آن‌گاه از (۱) و (۲) لازم می‌آید که $\overline{\lim}\, (u_n)^{1/n} > 1$

در این صورت، به استناد آزمون ریشه کوشی، سری مفروض واگرااست.

روش دیگر: سری مفروض را به حاصل جمع دو سری تجزیه می‌کنیم:

$$a+b+a^2+b^2+a^3+b^3+\dots = (a+a^2+a^3+\dots) + (b+b^2+b^3+\dots)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a^n + \sum_{n=1}^{\infty} b^n$$

اگر $a<1$ ، $b<1$ هر دو سری هندسی $\sum a^n$ ، $\sum b^n$ همگرایند و، بنابراین حاصل جمع آنها نیز همگرااست و نتیجه می‌گیریم که سری مفروض در این حالت همگرااست

اگر $a\geq 1$ یا $b\geq 1$ حداقل یکی از دو سری هندسی مذکور واگرا خواهد بود. از این رو، سری مفروض نیز در هر یک از این حالات واگرااست.

حل (ب): اگر سری مفروض را به صورت حاصل جمع دو سری هندسی زیر بنویسیم:

$$1+a+ab+a^2b+a^2b^2\dots = (1+ab+a^2b^2+\dots) + (a+a^2b+a^3b^2+\dots)$$

از فرض $ab<1$ نتیجه می‌گیریم که هر دو سری همگرایند و بنابراین، سری مفروض نیز همگرااست.

روش دیگر: اگر جمله n ام سری را u_n بنامیم، ملاحظه می‌کنیم که:

$$u_{2n-1} = a^n b^{n-1} \qquad u_{2n} = a^n b^n$$

اینک، مانند (الف) ، به استناد آزمون ریشه کوشی میتوان ثابت کرد که اگر $ab<1$ سری مفروض همگرااست. (اثبات را به متعلمین واگذار می‌کنیم.)

مثال ۱۶: (الف): نشان دهید که سری زیر به ازای $-1\leq x\leq 1$ همگرااست.

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

(ب): نشان دهید که سری زیر به ازای $-1\leq x\leq 1$ همگرااست.

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} - \dots$$

برهان (الف): فرض کنید $|x|<1$ ملاحظه می‌کنیم:

$$\sum \left|(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}\right| = \sum \frac{|x|^n}{n} < \sum |x^n|$$

چون سری هندسی سمت راست همگرااست، از آزمون مقایسه نتیجه می‌شود که سری مفروض به

ازای $-1<x<1$ مطلقا همگرااست. از این رو، سری مفروض به ازای $-1<x<1$ همگرااست.

اگر $x=1$ آنگاه $\Sigma(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\Sigma(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

که متناوب و به صورت $\Sigma(-1)^{n-1}Vn$ است با $Vn=\frac{1}{n}$ چون $\{Vn\}$ نزولی است و همگرا به صفر، از آزمون لایپ‌نیتس لازم می‌آید که سری مفروض به ازای $x=1$ همگرا باشد و برهان الف تمام است.

تبصره: در اثبات همگرایی مطلق، از آزمون نسبت نیز می‌توانستیم استفاده کنیم.

برهان (ب): سری داده شده عبارت است از: $\Sigma a_n = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}-\dots$

بنابراین: $\Sigma|a_n| = |x|+\frac{|x|^3}{3}+\frac{|x|^5}{5}+\frac{|x|^7}{7}+\dots$

یعنی، $|a_n| = \frac{|x|^{2n-1}}{2n-1}$

لذا $|a_{n+1}| = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$

در نتیجه: $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\frac{|x|^{2n-1}}{2n-1}\times\frac{2n+1}{|x|^{2n+1}}=\frac{2n+1}{2n-1}\times\frac{1}{|x|^2}=\frac{2n+1}{2n-1}\times\frac{1}{x^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(1+1/2n)}{2n(1-1/2n)}\times\frac{1}{x^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/2n}{1-1/2n}\times\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}$$

بنابراین، به استناد آزمون نسبت، سری $\Sigma|a_n|$ همگرااست اگر $\frac{1}{x^2}>1$ یا $x^2<1$. در نتیجه، سری Σa_n همگرااست اگر $|x|<1$ یا $-1<x<1$. [زیرا، هر سری که همگرای مطلق باشد همگرا نیز می‌باشد] اگر $x=1$ آنگاه: $\Sigma a_n = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$

که یک سری متناوب به شکل $\Sigma(-1)^{n-1}Vn$ می‌باشد که در آن $Vn=\frac{1}{2n-1}$

چون $\{Vn\}$ نزولی و همگرا به صفر است، از آزمون لایپنیتس نتیجه می‌شود که سری مفروض به ازای $x=1$، همگرااست. اگر $x=-1$، سری به صورت $\Sigma(-1)^n Vn$ است که درآن $Vn=\frac{1}{2n-1}$ و همان نتیجه قبلی بدست می‌آید.

بنابراین، سری مفروض به ازای $-1\le x\le 1$ همگرا و برهان تمام است.

مثال ۱۷: نشان دهید که سریهای زیر به ازای همه مقادیر r مطلقا همگرایند.

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} r^{2n-1}}{(2n-1)!}$ (ب): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} r^{2n-2}}{(2n-2)!}$

برهان (الف): با فرض $a_n = \frac{r^{2n-1}}{(2n-1)!}$ داریم:

$$|a_n| = \frac{|r^{2n-1}|}{(2n-1)!} \quad , \quad |a_{n+1}| = \frac{|r^{2n+1}|}{(2n+1)!}$$

از این رو، اگر $r \neq 0$ آنگاه:

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(2n+1)!}{|r^{2n+1}|} \times \frac{r^{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{(2n+1)(2n)}{r^2}$$

و:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \infty > 1$$

در نتیجه به استناد آزمون نسبت، سری $\sum |a_n|$ به ازای $r \neq 0$ همگرااست. در حالتی که $r = 0$ سری مفروض همگرای مطلق و مقدار آن صفراست.

برهان (ب): با فرض $a_n = \frac{r^{2n-2}}{(2n-2)!}$ داریم:

$$|a_n| = \frac{|r^{2n-2}|}{(2n-2)!} \quad , \quad |a_{n+1}| = \frac{|r^{2n}|}{(2n)!}$$

از این رو، اگر $r \neq 0$ آنگاه:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{|r^{2n-2}|}{(2n-2)!} \times \frac{(2n)!}{|r^{2n}|} = \frac{2n(2n-1)}{r^2}$$

و

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \infty > 1$$

در نتیجه، به استناد آزمون نسبت، سری $\sum |a_n|$ به ازای $r \neq 0$ همگرااست. در حالتی که $r = 0$ حکم بدیهی است.

۳۴.۲: بخش سی و چهارم

آزمون رابه:

اگر $\sum a_n$ یک سری با جمل مثبت باشد آنگاه

(الف): سری همگرااست اگر ، $\underline{\lim}\, n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$

(ب): سری واگراست اگر ، $\overline{\lim}\, n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$

برهان: در آزمون کومر، اگر $d_n=n$ فرض شود آنگاه:

$\Sigma \frac{1}{d_n} = \Sigma \frac{1}{n}$ یک سری واگرااست و $t_n = d_n \times \frac{a_n}{a_{n+1}} - d_{n+1}$ برابر می‌شود با:

$t_n = n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)$ یا، $t_n = n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1$ (۱)

حال ملاحظه می‌کنیم که اگر $\underline{\lim}\, n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 1$ آنگاه، بنابر (۱) $\underline{\lim}\, t_n > 0$

لذا به استناد آزمون کومر، سری Σa_n همگرااست.همچنین بنابر(۱)، اگر $\overline{\lim}\, n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) < 1$

آنگاه $\overline{\lim}\, t_n < 0$ و، مجددا به استناد آزمون کومر، سری Σa_n واگرااست.

شکل عملی آزمون رابه:

سری با جمل مثبت Σa_n همگرا یا واگرااست بر حسب اینکه $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 1$ و یا $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) < 1$. اگر $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = 1$ این آزمون جواب نمی‌دهد.

به عنوان مثال، سری $\Sigma \frac{1}{n(\text{Log } n)^p}$ را در نظر می‌گیریم. با فرض $a_n = \frac{1}{n(\text{Log } n)^p}$ به راحتی می‌توان نشان داد که $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = 1$. اما می‌دانیم که این سری همگرااست اگر $p>1$ ، و واگرااست اگر $p\leq 1$

۳۵.۲: بخش سی وپنجم

آزمون دمورگان و برتراند

سری با جمل مثبت Σa_n همگرااست اگر $\underline{\lim}\, [\, n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1]\, \text{Log}\, n > 1$

و واگرااست اگر $\overline{\lim}\, [\, n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1]\, \text{Log}\, n < 1$

برهان: در آزمون کومر، فرض می‌کنیم ، $n\geq 2$ ، $d_n = n\text{Log } n$

در این صورت، می‌دانیم سری $\Sigma \frac{1}{d_n} = \Sigma \frac{1}{n\text{Log } n}$ واگرااست ، و

$$t_n = d_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - d_{n+1} = n\text{Log}n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\text{Log}(n+1)$$

اگر ملاحظه کنیم که: $\text{Log}\,(n+1) = \text{Log}\, n(1+\frac{1}{n}) = \text{Log}n + \text{Log}(1+\frac{1}{n})$

خواهیم داشت:

$$t_n = n\text{Log}n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\,[\text{Log}\, n + \text{Log}(1+\frac{1}{n})]$$

$$= n\text{Log}n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\text{Log}\, n - (n+1)\text{Log}\,(1+\frac{1}{n})$$

$$= [n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1]\,\text{Log}n - \frac{n+1}{n}[n\,\text{Log}(1+\frac{1}{n})]$$

$$= [n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1]\,\text{Log}n - (1+\frac{1}{n})\,\text{Log}(1+\frac{1}{n})^n$$

که از آن، با توجه به اینکه $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ نتیجه می‌شود که:

$$\underline{\lim}\, t_n = \lim\,[n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1]\,\text{Log}n - 1$$

$$\overline{\lim}\, t_n = \lim\,[n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1]\,\text{Log}n - 1$$

اکنون به استناد آزمون کومر، از این روابط احکام مورد نظر حاصل می‌شود و برهان تمام است.

شکل عملی آزمون دمورگان و برتراند:

فرض کنید Σa_n یک سری با جمل مثبت باشد و $\lim\limits_{n\to\infty}[n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1]\,\text{Log}\, n = L$

آنگاه، Σa_n همگراست اگر $L>1$ و واگراست اگر $L<1$

تبصره: اگر $L=1$ آزمون جواب نمی‌دهد.

۳۶.۲: بخش سی و ششم

آزمون گاوس: فرض می‌کنیم Σa_n یک سری با جمل مثبت باشد و $p>1$. $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ را به صورت:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\alpha_n}{n^p} \qquad (*)$$

در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم دنباله $\{\alpha_n\}$ کراندار باشد. آنگاه:

سری Σa_n همگراست است در صورتیکه $\mu>1$، و واگراست در صورتیکه $\mu\leq 1$

برهان: از $(*)$ نتیجه می‌شود که (۱)

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1) = \mu + \frac{\alpha_n}{n^{p-1}}$$

از این رو، فرض کرانداری $\{\alpha_n\}$ ایجاب می‌کند که:

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1) = \mu$$

بنابراین، به استناد آزمون رابه، سری Σa_n همگرااست اگر $\mu>1$ و واگرااست اگر $\mu<1$

اگر $\mu=1$ ، از (۱) لازم می‌آید که :
$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=1+\frac{\alpha_n}{n^{p-1}}$$

بنابراین،
$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1=\frac{\alpha_n}{n^{p-1}}$$

و، پس از ضرب طرفین در $\log n$:
$$\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\operatorname{Log} n=\frac{\alpha_n}{n^{p-1}}\,.\,\operatorname{Log} n$$

از این رو،
$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(n\,\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\operatorname{Log} n=\lim_{n\to\infty}\left[\alpha_n\,.\,\frac{\operatorname{Log} n}{n^{p-1}}\right]=0<1$$

[زیرا، $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{Log} n}{n^{p-1}}=0$ و $\{\alpha_n\}$ کراندار است.]

لذا به استناد آزمون دمورگان و برتراند ، سری Σa_n واگرااست. این برهان راکامل می‌کند.

مثال ۱: در مورد همگرایی سری مقابل بحث کنید: $\frac{1}{2}+\frac{1\times3}{2\times4}+\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}+\dots$

حل: با فرض $a_n=\frac{1\times3\times5\times\dots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\dots(2n)}$ داریم:

$$a_{n+1}=\frac{1\times3\times5\times\dots\times(2n-1)(2n+1)}{2\times4\times6\times\dots(2n)(2n+2)}$$

بنابراین:
$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2n+2}{2n+1}=\frac{2n(1+1/n)}{2n(1+2/n)}=\frac{1+1/n}{1+2/n}$$

لذا:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1$$

و متوجه می‌شویم که آزمون نسبت جواب نمی‌دهد. حال، از آزمون را به استفاده می‌کنیم. داریم:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right)=\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2+1/n}$$

از این رو:
$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+1/n}=\frac{1}{2}$$

لذا به استناد آزمون رابه ، سری Σa_n واگرااست.

مثال ۲: در مورد همگرایی سری مقابل بحث کنید:

$$1+\frac{(1!)^2}{2!}x+\frac{(2!)^2}{4!}x^2+\frac{(3!)^2}{6!}x^3+\dots\qquad ,\ x>0$$

حل: صرف نظر از جمله اول داریم:
$$a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}\times x^n$$

و با تبدیل n به n+۱ داریم:

$$a_{n+1} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot x^{n+1}$$

از این رو

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot x^2 \cdot \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \times \frac{1}{x^{n+1}}$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \times \frac{1}{x} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{2(2n+1)}{n+1} \times \frac{1}{x} = \frac{4n(1+1/2n)}{n(1+1/n)} \times \frac{1}{x} = \frac{4(1+1/2n)}{(1+1/n)} \times \frac{1}{x}$$

بنابراین ،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{4}{x}$$

لذا سری Σa_n همگراست اگر $x<4$ ، و واگراست اگر $x>4$.

اگر $x=4$ ، آزمون نسبت جواب نمی‌دهد. در این حالت ملاحظه می‌کنیم که:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left[\frac{2(2n+1)}{n+1} \times \frac{1}{4} - 1\right] = \frac{-n}{2(n+1)} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+1/n}$$

از این رو:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = -\frac{1}{2}$$

و به استناد آزمون رابه، نتیجه می‌گیریم که سری مفروض به ازای $x=4$ واگراست.

بنابراین، سری Σa_n همگراست اگر $x<4$ و واگراست اگر $x\geq 4$.

شکل دیگر مثال فوق :

نشان دهید که سری $\Sigma \frac{(n!)^2}{(2n)!} \times x^n$ همگرای مطلق است اگر $|x|<4$ و واگراست اگر $|x|\geq 4$

مثال ۳: در مورد همگرایی سری Σa_n با:

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\ \dots\ (\alpha+n-1) \cdot \beta(\beta+1)\ \dots\ (\beta+n-1)}{r(r+1)\ \dots\ (r+n-1) \cdot \delta(\delta+1)\ \dots\ (\delta+n-1)}$$

که در آن α ، β ، r ، δ اعداد حقیقی مثبت فرض می‌شوند، بحث کنید.

برهان: ملاحظه می‌کنیم که

$$a_{n+1} = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)(\alpha+n)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)(\beta+n)}{r(r+1)\ldots(r+n-1)(r+n)\,.\,\delta(\delta+1)\ldots(\delta+n-1)(\delta+n)}$$

بنابراین :

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(r+n)(\delta+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}$$

لذا:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\frac{(r+\delta-\alpha-\beta)\,n + r\delta - \alpha\beta}{(\alpha+n)(\beta+n)} = \frac{r+\delta-\alpha-\beta+\frac{r\delta-\alpha\beta}{n}}{(1+\alpha/n)(1+\beta/n)}$$

و نتیجه می‌گیریم که:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r+\delta-\alpha-\beta$$

از این رو به استناد آزمون رابه، سری مفروض همگراست اگر $r+\delta-\alpha-\beta > 1$ و واگراست در صورتی که $r+\delta-\alpha-\beta < 1$. در حالتی که $r+\delta-\alpha-\beta = 1$ آزمون جواب نمی‌دهد. در این حالت، از آزمون دمورگان استفاده می‌کنیم. داریم:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\frac{(r+\delta-\alpha-\beta)\,n + r\delta - \alpha\beta}{(\alpha+n)(\beta+n)}$$

$$= n\frac{1\times n + r\delta - \alpha\beta}{(\alpha+n)(\beta+n)} = n\frac{n + r\delta - \alpha\beta}{(\alpha+n)(\beta+n)}$$

لذا:

$$\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right]\operatorname{Log} n = \frac{-(\alpha+\beta)\,n + (r\delta-\alpha\beta)n - \alpha\beta}{(\alpha+n)(\beta+n)}\operatorname{Log} n$$

و نتیجه می‌گیریم که:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right]\operatorname{Log} n = 0 < 1$$

از این رو به استناد آزمون دمورگان، سری مفروض در حالتی که $r+\delta-\alpha-\beta = 1$ واگراست.

مثال ۴: همگرایی سری : $1 + \frac{\alpha\beta}{1\times\delta}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\times 2\times\delta(\delta+1)}\,.\,x^2 + \ldots$ ، $x>0$ را بیازمایید.

حل: با صرف نظر از جمله اول، داریم:

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\times 2\times 3\times\ldots\times n\times\delta(\delta+1)\ldots(\delta+n-1)}\,.\,x^n$$

از این رو اگر مانند مثال ۳ عمل کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{\alpha+n}\times\frac{1}{\beta+n}\times(n+1)(\delta+n)\times\frac{1}{x}$$

$$= \frac{(n+1)(n+\delta)}{(\alpha+n)(\beta+n)} \times \frac{1}{x} = \frac{n(1+\frac{1}{n})\, n\,(1+\frac{\delta}{n})}{n(1+\frac{\alpha}{n})\, n\,(1+\frac{\beta}{n})} \times \frac{1}{x} = \frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{\delta}{n})}{(1+\frac{\alpha}{n})(1+\frac{\beta}{n})} \times \frac{1}{x}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{x}$$

در نتیجه به استناد آزمون نسبت، سری Σa_n همگراست اگر $x<1$ ، و واگراست اگر $x>1$.

اگر $x=1$ آزمون نسبت جواب نمی‌دهد. در این حالت داریم:

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\ \dots\ (\alpha+n-1)\beta\,(\beta+1)\ \dots\ (\beta+n-1)}{1\times 2\times 3\times\ \dots\ \times n \times \delta(\delta+1)\ \dots\ (\delta+n-1)}$$

این همان سری مثال ۳ است با $r=1$ به استناد نتیجه‌ای که در مثال ۳ به دست آوردیم، ملاحظه می‌کنیم که سری مفروض به ازای $x=1$ همگراست اگر $1+\delta-\alpha-\beta>1$ و واگراست اگر $1+\delta-\alpha-\beta\le 1$. به عبارت دیگر، در حالت $x=1$ سری مفروض همگراست اگر $\delta>\alpha+\beta$، و واگراست اگر $\delta\le\alpha+\beta$.

مثال ۵: در همگرایی سری Σa_n با $a_n = [\frac{1\times 3\times 5\times\ \dots\ \times (2n-1)}{2\times 4\times 6\times\ \dots\ \times (2n)}]^p$ که در آن p یک عدد حقیقی دلخواه است، بحث کنید.

حل: اگر $p=0$ همواره $a_n=1$. بنابراین، $\lim_{n\to\infty} a_n = 1\neq 0$ و در نتیجه، Σa_n واگراست.

اگر $p\neq 0$ با تبدیل n به $(n+1)$، داریم:

$$a_{n+1} = [\frac{1\times 3\times 5\times\ \dots\ (2n-1)(2n+1)}{2\times 4\times 6\times\ \dots\ (2n)(2n+2)}]$$

لذا:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = (\frac{2n+2}{2n+1})^p = \frac{(2n)^p\,(1+1/n)^p}{(2n)^p\,(1+1/2n)^p} = \frac{(1+1/n)^p}{(1+1/2n)^p}$$

و

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$$

در نتیجه، آزمون نسبت جواب نمی‌دهد.

برای ادامه بحث، از آزمون رابه استفاده می‌کنیم ملاحظه می‌کنیم که:

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = n[\frac{(2n+2)^p}{(2n+1)^p} - 1] = n\frac{(2n+2)^p - (2n+1)^p}{(2n+1)^p}$$

$$= n\frac{[(2n+1)+1]^p - (2n+1)^p}{(2n+1)^p}$$

$$=n\,\frac{[(2n+1)^p + p(2n+1)^{p-1} + \dots + 1] - (2n+1)^p}{(2n+1)^p} = n\,\frac{p(2n+1)^{p-1} + \dots + 1}{(2n+1)^p}$$

$$= \frac{n}{2n+1}\left[p + \frac{p(p-1)}{2}(2n+1)^{-1} + \dots + (2n-1)^{-(p-1)}\right]$$

از این رو،

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \frac{p}{2}$$

لذا، سری Σa_n همگراست اگر $p<2$ و واگراست اگر $p>2$ به ازای $p=2$ داریم:

$$\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right]\operatorname{Log} n = \left\{n\left[\frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2} - 1\right] - 1\right\}\operatorname{Log} n$$

$$= \left[n\,\frac{(2n+2)^2 - (2n+1)^2}{(2n+1)^2} - 1\right]\operatorname{Log} n = \left[n \times \frac{4n+3}{(2n+1)^2} - 1\right]\operatorname{Log} n$$

$$= \left(\frac{4n^2+3n}{4n^2+4n+1} - 1\right)\operatorname{Log} n = -\frac{n+1}{2n+1} \times \frac{\operatorname{Log} n}{2n+1}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right]\operatorname{Log} n = \left(-\frac{1}{2}\right) \times 0 = 0$$

از این رو، به استناد آزمون دمورگان، سری مفروض به ازای $p=2$ نیز واگراست.

مثال ۶: در همگرایی سری Σa_n با

$$a_n = \left[\frac{1\times3\times5\times\dots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\dots\times(2n)}\right]^{2\alpha} \times n^{\beta} \times x^n \qquad x>0$$

بحث کنید.

حل: با تبدیل n به $n+1$، داریم:

$$a_{n+1} = \left[\frac{1\times3\times5\times\dots\times(2n-1)(2n+1)}{2\times4\times6\times\dots\times(2n)(2n+2)}\right]^{2\alpha} \times (n+1)^{\beta} \times x^{n+1}$$

از این رو،

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n+2)}{(2n+1)}^{2\alpha} \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\beta} \times \frac{1}{x}$$

$$= \left[\frac{2n(1+1/n)}{2n(1+1/2n)}\right]^{2\alpha} \times \left[\frac{n}{n(1+1/n)}\right]^{\beta} \times \frac{1}{x}$$

$$= \left(\frac{1+1/n}{1+1/2n}\right)^{2\alpha} \times \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^{\beta} \times \left(\frac{1}{x}\right)$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{x}$$

در نتیجه، به استناد آزمون نسبت، سری Σa_n همگراست اگر $x<1$ و واگراست اگر $x>1$.

وقتی $x=1$ ، آزمون نسبت جواب نمی‌دهد.

به ازای $x=1$ ، اگر مانند مثال ۵ از آزمونهای رابه و دمورگان استفاده کنیم، متوجه می‌شویم که سری مفروض همگرااست اگر $\alpha-\beta>1$ ، و واگرااست اگر $\alpha-\beta\leq 1$

مثال ۷: ثابت کنید که سری Σa_n با:

$$a_n=\left[\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}\right]^p\times x^n \qquad ، x>0 \qquad ، P\in R$$

(الف): همگرااست اگر $x<1$.

(ب): واگرااست اگر $x>1$

(ج): به ازای $x=1$ همگرااست اگر $p>2$ و واگرااست اگر $p\leq 2$.

برهان: برای (الف) و (ب) از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم و به ازای $x=1$ به مثال ۶ بر می‌گردیم.

مثال ۸: در مورد همگرایی یا واگرایی سریهای زیر بحث کنید:

(الف): $$1+\frac{a}{b}+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}+\frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}+\ldots$$

(ب): $$1+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^2\times4^2}{3^2\times5^2}+\frac{2^2\times4^2\times6^2}{3^2\times5^2\times7^2}+\ldots$$

حل (الف): اگر جمله nام را u_n بنامیم، صرف نظر از جمله اول داریم:

$$u_n=\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)\ldots(b+n-1)}$$

آنگاه، با تبدیل n به $n+1$ ، داریم:

$$u_{n+1}=\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)(a+n)}{b(b+1)\ldots(b+n-1)(b+n)}$$

بنابراین:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)\ldots(b+n-1)}\times\frac{b(b+1)\ldots(b+n-1)(b+n)}{a(a+1)\ldots(a+n-1)(a+n)}$$

$$=\frac{b+n}{a+n}=\frac{n(1+b/n)}{n(1+a/n)}=\frac{1+b/n}{1+a/n}$$

در نتیجه:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=1$$

از این رو آزمون نسبت جواب نمی‌دهد. برای ادامه بحث از آزمونهای رابه و دمورگان استفاده می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که:

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{b+n}{a+n}-1\right)=\frac{(b-a)^n}{a+n}=\frac{b-a}{1+a/n}$$

از این رو:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=b-a$$

لذا به استناد آزمون رابه، سری Σu_n همگراست اگر $b-a>1$ و واگراست اگر $b-a<1$.

اگر $b-a=1$ آنگاه $b-a-1=0$ در این صورت داریم:

$$\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]\operatorname{Log}n=\left[\frac{(b-a)n}{a+n}-1\right]\operatorname{Log}n=\frac{(b-a-1)n-a}{a+n}\operatorname{Log}n$$

$$=\frac{0\times n-a}{a+n}\operatorname{Log}n=\frac{-a}{a+n}\operatorname{Log}n$$

لذا:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]\operatorname{Log}n=0$$

از این رو به استناد آزمون دمورگان، سری مفروض در حالتی که $b-a=1$ نیز واگراست.

حل (ب): اگر جمله nام سری را a_n بنامیم، صرف نظر از جمله اول داریم:

$$a_n=\frac{2^2\times4^2\times\ldots\times(2n)^2}{3^2\times5^2\times\ldots\times(2n+1)^2}$$

با تبدیل n به n+1 داریم:

$$a_{n+1}=\frac{2^2\times4^2\times6^2\times\ldots\times(2n+2)^2}{3^2\times5^2\times7^2\times\ldots\times(2n+3)^2}$$

بنابراین،

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2^2\times4^2\times\ldots\times(2n)^2}{3^2\times5^2\times\ldots\times(2n+1)^2}\times\frac{3^2\times5^2\times\ldots\times(2n+3)^2}{2^2\times4^2\times\ldots\times(2n+2)^2}$$

$$=\frac{(2n+3)^2}{(2n+2)^2}=\frac{(2n)^2\times(1+3/2n)^2}{(2n)^2\times(1+1/n)^2}=\frac{(1+3/2n)^2}{(1+1/n)^2}$$

لذا:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1$$

و نتیجه می‌گیریم که آزمون نسبت جواب نمی‌دهد.

اما:

$$\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\operatorname{Log}=\left\{n\left[\frac{(2n+3)^2}{(2n+2)^2}-1\right]\right\}\operatorname{Log}n$$

$$=\frac{-3n+1}{2n+2}\times\frac{\operatorname{Log}n}{2n+2}=\frac{-3+1/n}{2+2/n}\times\frac{\operatorname{Log}n}{2n+2}$$

از این رو: $\lim_{n\to\infty}[n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1]\,\text{Log}n = 0$

لذا به استناد آزمون دمورگان، سری Σa_n واگرااست.

مثال ۹: در مورد همگرایی سریهای زیر بحث کنید:

(الف): $\Sigma = \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$

(ب): $1+\frac{3}{7}x+\frac{3\times6}{7\times10}x^2+\ldots \quad ، x>0$

(ج): $\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^2\times3^2}{2^2\times4^2}x+\frac{1^2\times3^2\times5^2}{2^2\times4^2\times6^2}x^2+\ldots \quad ، x>0$

(د): $\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\times3}{2\times4}\times\frac{x^5}{5}+\ldots$

حل (الف): این همان سری مثال ۶ است با $\alpha=\frac{1}{2}$ ، $\beta=-\frac{1}{2}$. چون: $x=1$
$\alpha-\beta=\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})=1$ نتیجه می‌گیریم که سری واگرااست.

حل (ب): اگر جمله nام سری را a_n بنامیم، صرف نظر از جمله اول داریم:

$$a_n = \frac{3\times6\times\ldots\times(3n)}{7\times10\times\ldots\times(3n+4)}\cdot x^n$$

و

$$a_{n+1} = \frac{3\times6\times9\times\ldots\times(3n+3)}{7\times10\times13\times\ldots\times(3n+7)}\cdot x^{n+1}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{3\times6\times9\times\ldots\times(3n)}{7\times10\times13\times\ldots\times(3n+4)}\times x^n\times\frac{7\times10\times\ldots\times(3n+4)(3n+7)}{3\times6\times\ldots\times(3n)(3n+3)}\times\frac{1}{x^{n+1}}$$

$$=\frac{(3n+7)}{(3n+3)}\times\frac{1}{x}=\frac{3n(1+7/3n)}{3n(1+1/n)}\times\frac{1}{x}=\frac{1+7/3n}{1+1/n}\times\frac{1}{x}$$

در نتیجه: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{x}$

بنابراین، به استناد آزمون نسبت، سری Σa_n همگرااست اگر $x<1$ و واگرااست اگر $x>1$. اگر، $x=1$ آزمون نسبت جواب نمی‌دهد.

در این حالت، ملاحظه می‌کنیم که: $n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n(\frac{3n+7}{3n+3}-1)=\frac{4n}{3n+3}=\frac{4}{3+3/n}$

از این رو: $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \frac{4}{3}$

و به استناد آزمون رابه، نتیجه می‌گیریم که سری مفروض همگراست.

بنابراین سری مفروض همگرااست اگر $x \le 1$ واگرااست اگر $x > 1$ باشد.

حل (ج): اگر جمله nام سری را a_n بنامیم صرف نظر از جمله اول داریم:

$$a_n = \frac{1^2\times3^2\times5^2\times\ldots(2n-1)^2}{2^2\times4^2\times6^2\times\ldots\times(2n)^2}\cdot x^{n-1}$$

$$a_{n+1} = \frac{1^2\times3^2\times5^2\times\ldots(2n+1)^2}{2^2\times4^2\times6^2\times\ldots\times(2n+2)^2}\cdot x^{n}$$

بنابراین: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2}\times\frac{1}{x} = \frac{(2n)^2(1+1/n)^2}{(2n)^2(1+1/2n)^2}\times\frac{1}{x} = \frac{(1+1/n)^2}{(1+1/2n)^2}\times\frac{1}{x}$

و نتیجه می‌گیریم که: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{x}$

لذا به استناد آزمون نسبت، سری Σa_n همگرااست اگر $x<1$ و واگرااست اگر $x>1$ اگر $x=1$ آزمون نسبت جواب نمی‌دهد. به ازای $x=1$ ملاحظه می‌کنیم که که این سری همان سری مثال ۵ است با $p=2$ و بنابراین واگرااست. در نتیجه:سری Σa_n همگرااست اگر $x<1$ و واگرااست اگر $x\ge1$

حل (د): فرض می‌کنیم $x>0$، زیرا اگر $x<0$ با ضرب همه جمل در -1، سری به حالتی که $x>0$ برمی‌گردد از این رو، رفتار سری در دو حالت $x>0$ و $x<0$ یکسان است.اگر جمله nام سری را a_n بنامیم، صرف نظر از جمله اول داریم:

$$a_n = \frac{1\times3\times5\times\ldots\times \text{عامل } n\times x^{2n+1}}{2\times4\times6\times\ldots\times \text{عامل } n\times(2n+1)} = \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}\times\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$a_{n+1} = \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n+1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n+2)}\times\frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

لذا $\frac{a_n}{a_{n+1}} = (\frac{2n+2}{2n+1})\times(\frac{2n+3}{2n+1})\times\frac{1}{x^2} = \frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}\times\frac{1}{x^2}$

$$= \frac{2n(1+1/n)2n(1+3/2n)}{(2n)^2(1+1/2n)^2}\times\frac{1}{x^2} = \frac{(1+1/n)(1+3/2n)}{(1+1/2n)^2}\times\frac{1}{x^2}$$

و نتیجه می‌گیریم: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{x^2}$

بنابراین به استناد آزمون نسبت، سری Σa_n همگرااست اگر $x^2<1$ و واگرااست اگر $x^2>1$.اگر

$x^2=1$ ، آزمون نسبت جواب نمی‌دهد.در این حالت:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2} = \frac{4n^2+10n+6}{4n^2+4n+1}$$

لذا:

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = n(\frac{4n^2+10n+6}{4n^2+4n+1} - 1) = \frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1}$$

در نتیجه:

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \frac{6}{4}$$

از این رو به استناد آزمون رابه، سری مفروض همگرااست.

در نتیجه: سری مفروض همگرااست اگر $x^2 \le 1$ و واگرااست اگر $x^2 > 1$.

۳۷.۲: بخش سی و هفتم

آزمون لگاریتم:

قضیه: فرض کنید Σa_n یک سری با جمل مثبت باشد در این صورت:

الف):این سری همگرااست اگر:

$$\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Log}\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$$

ب):این سری واگرااست اگر:

$$\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Log}\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$$

برهان (الف): فرض می‌کنیم

$$q = \lim_{n\to\infty} n\mathrm{Log}\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

p را طوری انتخاب می‌کنیم که $1<p<q$. فرض می‌کنیم $V_n = \frac{1}{n^p}$

نامساوی،

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{V_n}{V_{n+1}} \qquad (1)$$

معادل است با،

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{(n+1)^p}{n^p} = (1+\frac{1}{n})^p$$

یا،

$$\mathrm{Log}\frac{a_n}{a_{n+1}} > p\ \mathrm{Log}\,(1+\frac{1}{n})$$

اگر طرفین را در n ضرب کنیم نامساوی زیر بدست می‌آید که هم‌ارز نامساوی اولیه است:

$$n\ \mathrm{Log}\frac{a_n}{a_{n+1}} > p\ \mathrm{Log}\,(1+\frac{1}{n})^n \qquad (2)$$

چون حد طرف چپ برابر q و حد طرف راست برابر p است، $q>p$ ، عددی طبیعی مانند m،

موجود است به طوری که نامساوی (۲) به ازای هر $n \geq m$ برقرار باشد. از این رو نامساوی (۱)، که هم‌ارز (۲) است نیز به ازای هر $n \geq m$ برقرار خواهد بود.

چون سری Σv_n همگرااست (آزمون p)، به استناد قضیه ۲۶.۲ ، سری Σa_n نیز همگرااست.

اثبات حکم (ب) مشابه است و به متعلم واگذار می‌شود.

مثال ۱: در مورد همگرایی سریهای زیر بحث کنید:

(الف): $\Sigma \frac{n!}{(n+1)^n} . x^n$ ، $x > 0$

(ب): $1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3^2 x^2}{3!} + \dots$

حل الف): با فرض $a_n = \frac{n!}{(n+1)^n} . x^n$ داریم:

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}} . x^{n+1}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{(n+1)^n} \times x^n \times \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{1}{x^{n+1}} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \times \frac{1}{x} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \times \frac{1}{x}$$

و

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \times \frac{1}{x} = e \times \frac{1}{x} = \frac{e}{x}$$

لذا به استناد آزمون نسبت، سری Σa_n همگرااست اگر $x < e$ و واگرااست اگر $x > e$.

اگر $x = e$ آزمون نسبت جواب نمی‌دهد. در این حالت،

$$a_n = \frac{n!}{(n+1)^n} e^n = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{e^{n+1}}{e}$$

$$= (n+1)! \times \left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi(n+1)}} \times \frac{\sqrt{2\pi(n+1)}}{e}$$

اما، ثابت می‌شود که (فرمول استرلینگ)

$$\lim_{n \to \infty} (n+1)! \left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi(n+1)}} = 1$$

از این رو، در این حالت:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 1 \times \infty = \infty$$

چون شرط لازم برای همگرایی سری Σa_n برقرار نیست، سری مفروض در این حالت واگرااست.

حل (ب): با فرض $a_n = \frac{n^{n-1} x^{n-1}}{n!}$ ، داریم:

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^n \times x^n}{(n+1)!}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^{n-1} x^{n-1}}{n!} \times \frac{(n+1)!}{(n+1)^n \times x^n} = \frac{n^{n-1}}{(n+1)^n} \times \frac{n+1}{x} = \frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n-1}} \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{(1+1/n)^{n-1}} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{(1+1/n)^{n}\,(1+1/n)^{-1}} \times \frac{1}{x}$$

بنابراین،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e \,.\, 1 \,.\, x} = \frac{1}{e \,.\, x}$$

در نتیجه، به استناد آزمون نسبت، سری Σa_n همگراست اگر $x<\frac{1}{e}$ ، و واگراست اگر $x>\frac{1}{e}$.

اگر $x=\frac{1}{e}$ آزمون نسبت جواب نمی‌دهد. در این حالت فرض می‌کنیم $b_n=\frac{1}{n^{3/2}}$ آن‌گاه:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{n-1}}{e^{n-1}} \times \frac{1}{n!} \times n^{3/2} = \frac{n^n}{e^n} \times \frac{1}{n!}\sqrt{2\pi n} \times \frac{e}{\sqrt{2\pi}}$$

اما چنان‌که در قسمت (الف) گفته شد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{e^n} \times \frac{1}{n!} \times \sqrt{2\pi n} = 1$$

از این رو:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \times \frac{e}{\sqrt{2\pi}} = \frac{e}{\sqrt{2\pi}}$$

که متناهی است. چون سری Σb_n همگراست، از آزمون مقایسه نتیجه می‌گیریم که سری Σa_n نیز همگراست.

مثال ۲: همگرایی یا واگرایی سری زیر رابررسی کنید:

$$x + \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{3^3 x^3}{3!} + \frac{4^4 x^4}{4!} + \dots$$

حل: در اینجا $a_n = \frac{n^n x^n}{n!}$ ، داریم:

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1} \,.\, x^{n+1}}{(n+1)!}$$

لذا:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^n \,.\, x^n}{n!} \times \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1} \,.\, x^{n+1}}$$

$$= \frac{n^n (n+1) n!}{n!(n+1)^{n+1}\, x} = \frac{n^n}{(n+1)^n\, x} = \frac{n^n}{n^n (1+1/n)^n \,.\, x} = \frac{1}{(1+1/n)^n \,.\, x}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{ex}$$

در نتیجه به استناد آزمون نسبت، سری Σa_n همگراست اگر $x<\frac{1}{e}$ و واگراست اگر $x>\frac{1}{e}$

اگر $x=\frac{1}{e}$ ، $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$ و آزمون نسبت جواب نمی‌دهد.

در این حالت فرض می‌کنیم $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.آن‌گاه:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^n}{e^n} \times \frac{1}{n!} \times \sqrt{n} = (\frac{n}{e})^n \times \frac{1}{n!}\sqrt{2\pi n} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

از این رو:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

که متناهی و ناصفر است. چون سری Σb_n واگراست ، از آزمون مقایسه لازم می‌آید که سری مفروض در این حالت نیز واگرا باشد. در نتیجه : سری مفروض به ازای $x<\frac{1}{e}$ همگرا و به ازای $x\geq\frac{1}{e}$ واگراست.

۳۸.۲: بخش سی و هشتم:

آزمون انتگرال:

قضیه: فرض می‌کنیم تابع f به ازای $x\geq 1$ نامنفی و نزولی باشد. همچنین، فرض می‌کنیم:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \qquad I_n = \int_1^n f(x)dx$$

در این صورت:

الف: $\lim_{n\to\infty}(\sigma_n - I_n)$ موجود است و $0 \leq \lim_{n\to\infty}(\sigma_n - I_n) \leq f(1)$

ب: سری $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ همگراست اگر و فقط اگر دنباله $\{I_n\}$ همگرا باشد.

ج: اگر دنباله $\{I_n\}$ همگرا باشد و $I = \lim_{n\to\infty} I_n$ آنگاه:

$$I \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq I + f(1)$$

برهان الف: هر x از بازه $[1 , \infty)$ در فاصله‌ای مانند $n-1\leq x<n$ قرار دارد. چون f نزولی است، نامساویهای $f(n) \leq f(x) \leq f(n-1)$ برقرارند.لذا داریم:

$$\int_{n-1}^{n} f(n-1)\,dx \geq \int_{n-1}^{n} f(x)dx \geq \int_{n-1}^{n} f(n)dx$$

یا

$$f(n-1)\int_{n-1}^{n} 1\,dx \geq \int_{n-1}^{n} f(x)dx \geq f(n)\int_{n-1}^{n} 1\,dx$$

که به نامساویهای زیر می‌انجامد:

$$f(n-1) \geq \int_{n-1}^{n} f(x)dx \geq f(n) \qquad (1)$$

لذا:

$$f(۱) \geq \int_{۱}^{۲} f(x)dx \geq f(۲)$$

$$f(۲) \geq \int_{۲}^{۳} f(x)dx \geq f(۳)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f(n-۱) \geq \int_{n-۱}^{n} f(x)dx \geq f(n)$$

از جمع آنها خواهیم داشت:

$$f(۱) + f(۲) + \ldots + f(n-۱) \geq \int_{۱}^{۲} f(x)dx + \int_{۲}^{۳} f(x)dx + \ldots + \int_{n-۱}^{n} f(x)dx$$

$$\geq f(۲) + f(۳) + \ldots + f(n)$$

یا:

$$Sn - f(n) \geq \int_{۱}^{n} f(x)dx \geq Sn - f(۱)$$

که چون $f(n) \geq ۰$ نتیجه می‌شود:

$$Sn \geq In \geq Sn - f(۱)$$

$$۰ \leq Sn - In \leq f(۱) \qquad (۲)$$

همچنین، به استناد (۱):

$$(Sn - In) - (Sn_{-۱} - In_{-۱}) = (Sn - Sn_{-۱}) - (In - In_{-۱}) = f(n) - \int_{n-۱}^{n} f(x)dx \leq ۰$$

بنابراین: به ازای هر n

$$Sn - In \leq Sn_{-۱} - In_{-۱}$$

در نتیجه، دنباله $\{Sn - In\}$ نزولی و کراندار است. لذا این دنباله همگرااست و به استناد (۲)، برهان (الف) تمام است.

برهان (ب): از قسمت (الف) نتیجه می‌شود که $\lim_{n\to\infty} Sn$ موجود است اگر و فقط اگر $\lim_{n\to\infty} In$ موجود باشد. بنابراین، سری $\Sigma f(n)$ همگرااست اگر و فقط اگر دنباله $\{In\}$ همگرا باشد.

برهان (ج): با فرض $\lim_{n\to\infty} Sn = S$ و $\lim_{n\to\infty} In = I$ ، از (۲) نتیجه می‌شود که:

$$۰ \leq S - I \leq f(۱)$$

در نتیجه:

$$I \leq S \leq I + f(۱)$$

مثال ۱: نشان دهید که سری $\Sigma \frac{1}{n^p}$ به ازای $p>1$ همگرااست و مقدار آن بین $\frac{1}{p-1}$ و $\frac{p}{p-1}$ است.

برهان: از مقایسه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ با $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ داریم: به ازای هر n ، $f(n)=\frac{1}{n^p}$

با تبدیل n به x ، تابع f به این صورت مشخص می‌شود: (۱) $x \geq 1$ ، $f(x)=\frac{1}{x^p}$

بدیهی است که تابع f نزولی و نامنفی است. با نمادهایی که در قضیه به کار رفت، داریم:

$$I_n = \int_1^n f(x)dx = \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \int_1^n x^{-p}dx$$

$$= \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^n = \frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)$$

ازاین رو:

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{p-1}(1-0) = \frac{1}{p-1}$$

بنابراین به استناد آزمون انتگرال، سری مفروض همگرااست و مقدار آن بین I و $I+f(1)$ است، یعنی، $\frac{1}{p-1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \frac{1}{p-1}+1$ ، $p>1$

مثال ۲: نشان دهید که $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right)$ موجود و بین صفر و یک قرار دارد.

حل: اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ بگیریم، ملاحظه می‌کنیم که $f(n)=\frac{1}{n}$ از این رو:

$$\sigma_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(k) = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$$

$$I_n = \int_1^n f(x)dx = \int_1^n \frac{1}{x}dx = \log x \Big|_1^n = \log n - \log 1 = \log n$$

لذا به استناد قضیه آزمون انتگرال، حد:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right) = \lim_{n\to\infty}(\sigma_n - I_n)$$

موجود است و بین صفر و $f(1)$ است. یعنی، بین صفر و یک .

مثال ۳: با استفاده از آزمون "انتگرال" همگرایی سریهای زیر را بیازمایید:

الف): $\sum \frac{1}{n^2+1}$ (ب): $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ (ج): $\sum \frac{2n^3}{n^4+3}$

د): $\sum \frac{n}{(n^2+1)^2}$ (ه): $\sum ne^{-n^2}$

حل (الف): در این جا $a_n = \frac{1}{n^2+1} = f(n)$.

با تبدیل n به x ، داریم: $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

f تابعی مثبت و به ازای همه مقادیر $x \geq 1$ نزولی است. ملاحظه می‌کنیم که:

$$I_n = \int_1^n f(x)dx = \int_1^n \frac{1}{x^2+1} d(x) = \left[\tan^{-1}x\right]_1^n = \tan^{-1}n - \tan^{-1}1$$

و: $$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} (\tan^{-1}n - \tan^{-1}1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

لذا $\{I_n\}$ همگرا می‌باشد. در نتیجه به استناد آزمون انتگرال، سری مفروض نیز همگرااست.

حل (ب): در این جا $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = f(n)$.

با تبدیل n به x داریم: $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$

تابع f در قلمرو $x \geq 1$ مثبت و نزولی است. ملاحظه می‌کنیم که:

$$I_n = \int_1^n f(x)dx = \int_1^n \frac{1}{x(x+1)} d(x) = \int_1^n \frac{(x+1)-x}{x(x+1)} d(x) = \int_1^n [\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}]dx$$

$$\left[\operatorname{Log}x - \operatorname{Log}(x+1)\right]_1^n = \left[\operatorname{Log}\frac{x}{x+1}\right]_1^n = \operatorname{Log}\frac{n}{n+1} - \operatorname{Log}\frac{1}{2}$$

و: $$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} (\operatorname{Log}\frac{n}{n+1} - \operatorname{Log}\frac{1}{2})$$

و: $$= \lim_{n\to\infty} (\operatorname{Log}\frac{1}{1+1/n}) - \operatorname{Log}\frac{1}{2} = \operatorname{Log}1 - \operatorname{Log}\frac{1}{2}$$

$$= \operatorname{Log}1 - [\operatorname{Log}1 - \operatorname{Log}2] = \operatorname{Log}2$$

بنابراین، دنباله $\{I_n\}$ همگرااست. در نتیجه به استناد آزمون انتگرال، سری مفروض نیز همگرا می‌باشد.

حل (ج): در این جا $a_n = \frac{2n^3}{n^4+3} = f(n)$.

با تبدیل n به x داریم $f(x) = \frac{2x^3}{x^4+3}$

تابع f در قلمرو $x \geq 1$ مثبت و نزولی است. ملاحظه می‌کنیم که:

$$I_n = \int_1^n f(x)dx = \int_1^n \frac{2x^3}{x^4+3} d(x) = \frac{1}{2}\int_1^n \frac{4x^3}{x^4+3} d(x) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{Log}(x^4+3)\right]_1^n = \frac{1}{2}\left[\operatorname{Log}(n^4+3) - \operatorname{Log}4\right]$$

و: $\lim_{n\to\infty} I_n = \infty$

یعنی، $\{I_n\}$ واگرا به ∞ است. بنابراین، به استناد آزمون انتگرال، سری مفروض نیز واگرا می‌باشد.

حل د: در این جا: $a_n = \frac{n}{(n^2+1)^2} = f(n)$

با تبدیل n به x داریم: $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$

تابع f در قلمرو $x \geq 1$ مثبت و نزولی است. ملاحظه می‌کنیم که:

$$I_n = \int_1^n f(x)dx = \int_1^n \frac{x}{(x^2+1)^2} d(x) = \frac{1}{2}\int_1^n (x^2+1)^{-2} \times (2x)\, d(x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^{-1}}{-1}\right]_1^n = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2+1}\right]_1^n = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{2}\right]$$

و $\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{2}\right]\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

یعنی دنباله $\{I_n\}$ همگراست بنابراین، بااستناد به آزمون انتگرال، سری مفروض نیز همگرا می‌باشد.

حل (هـ): در این جا $a_n = ne^{-n^2} = f(n)$

با تبدیل n به x ، داریم: $f(x) = xe^{-x^2}$

تابع f در قلمرو $x \geq 1$ مثبت و نزولی است. ملاحظه می‌کنیم که:

$$I_n = \int_1^n f(x)dx = \int_1^n xe^{-x^2}\,dx$$

با تغییر متغیر $x^2=t$ انتگرال می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$I_n = \int_1^{n^2} e^{-t}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_1^{n^2} e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-t}}{-1}\right]_1^{n^2} = -\frac{1}{2}\left[e^{-n^2} - e^{-1}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} I_n = -\frac{1}{2}\left[0 - e^{-1}\right] = \frac{1}{2e}$$

یعنی دنباله $\{I_n\}$ همگرااست. لذا با استناد به آزمون انتگرال، سری مفروض نیز همگرا می‌باشد.

مثال ۴: با استفاده از آزمون انتگرال، در مورد همگرایی سریهای زیر بحث کنید:

الف): $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ ، $p>0$ ب): $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\mathrm{Log}n)^p}$ ، $p>0$

حل الف: در این جا ، $a_n = \frac{1}{n^p} = f(n)$

با تبدیل n به x داریم: $f(x) = \frac{1}{x^p}$

این تابع در قلمرو $x\geq 1$ مثبت و نزولی است.

حالت اول : $p\neq 1$ در این حالت می‌توان نوشت: $I_n = \int_1^n f(x)dx = \int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^n x^{-p}\,dx$

$$= \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^n = \frac{1}{1-p}\left[n^{1-p}-1\right]$$

از این رو،

(۱): اگر $p>1$ آنگاه: $\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{1-p}\left(\lim_{n\to\infty}\left[n^{1-p}-1\right]\right) = \frac{1}{1-p}\left[0-1\right] = \frac{1}{1-p}$

(۲): اگر $p<1$ آنگاه: $\lim_{n\to\infty} I_n = \infty$

یعنی،دنباله $\{I_n\}$ واگرا به ∞ است.در نتیجه به استناد آزمون انتگرال، سری مفروض نیز واگرااست.

حالت دوم: $p=1$ در این حالت ملاحظه می‌کنیم که: $f(x) = \frac{1}{x}$

آنگاه: $I_n = \int_1^n f(x)dx = \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \left[\mathrm{Log}x\right]_1^n$

$= \text{Log}n - \text{Log}1 = \text{Log}n$

بنابراین: $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \infty$

یعنی، $\{I_n\}$ واگرا به ∞ است. در نتیجه، به استناد آزمون انتگرال، سری مفروض نیز واگرااست.

بنابراین: سری مفروض همگرااست، اگر $p>1$، و واگرااست اگر $P\leq 1$.

حل (ب): در این جا، $a_n = \dfrac{1}{n(\text{Log}n)^p} = f(n)$

با تبدیل n به x داریم: $f(x) = \dfrac{1}{x(\text{Log}x)^p}$

تابع f در قلمرو $x\geq 1$ مثبت و نزولی است.

حالت اول: $p\neq 1$ در این حالت می‌توان نوشت:

$$I_n = \int_2^n f(x)dx = \int_2^n \frac{1}{x(\text{Log}x)^p}\,dx = \int_2^n (\text{Log}x)^{-p} \times \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \left[\frac{(\text{Log}x)^{-p+1}}{-p+1}\right]_2^n = \frac{1}{1-p}\left[(\text{Log}n)^{1-p} - (\text{Log}2)^{1-p}\right]$$

از این رو، (۱): اگر $p>1$ آنگاه: $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \dfrac{1}{1-p}[0 - (\text{Log}2)^{1-p}]$

یعنی دنباله $\{I_n\}$ همگرا می‌باشد. درنتیجه، به استناد آزمون انتگرال سری مفروض نیز همگرا می‌باشد.

(۲): اگر $P<1$ آنگاه: $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \infty$

یعنی، دنباله $\{I_n\}$ واگرا به ∞ است. به استناد آزمون انتگرال، سری مفروض نیز واگرا می‌باشد.

حالت دوم: $p=1$ در این حالت، $f(x) = \dfrac{1}{x(\text{Log}x)}$

$$I_n = \int_2^n f(x)dx = \int_2^n \frac{1}{x\text{Log}x}\,dx = \int_2^n \frac{1/x}{\text{Log}x}\,dx$$

$$= \left[\text{Log}(\text{Log}x)\right]_2^n = \text{Log}(\text{Log}n) - \text{Log}(\text{Log}2)$$

در نتیجه، $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\text{Log}(\text{Log}n) - \text{Log}(\text{Log}2)\right] = \infty$

یعنی، دنباله $\{I_n\}$ واگرا می‌باشد. بنابراین، به استناد آزمون انتگرال، سری مفروض نیز واگرا می‌باشد. بنابراین: سری مفروض همگرااست اگر $P>1$، و واگرااست اگر $p\leq 1$.

مثال ۵: با استفاده از آزمون انتگرال، در مورد همگرایی سری زیر بحث کنید:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\mathrm{Log}n\,(\mathrm{Log}\mathrm{Log}n)^{p}} \quad , \quad P>0$$

حل: در این جا:

$$a_n = \frac{1}{n\mathrm{Log}n\,(\mathrm{Log}\mathrm{Log}n)^{p}} = f(n)$$

با تبدیل n به x داریم:

$$f(x) = \frac{1}{x\mathrm{Log}x\,(\mathrm{Log}\mathrm{Log}x)^{p}}$$

تابع f در قلمرو $x\geq 3$ مثبت و نزولی است.

حالت اول: $p\neq 1$ در این حالت، می‌توان نوشت:

$$I_n = \int_3^n f(x)dx = \int_3^n \frac{1}{x\mathrm{Log}x\,(\mathrm{Log}\mathrm{Log}x)^{p}}\,dx = \int_3^n (\mathrm{Log}\mathrm{Log}x)^{-p} \times \frac{1}{x\mathrm{Log}x}\,dx$$

$$= \left[\frac{(\mathrm{Log}\mathrm{Log}x)^{-p+1}}{-p+1}\right]_3^n = \frac{1}{1-p}\left[(\mathrm{Log}\mathrm{Log}n)^{1-p} - (\mathrm{Log}\mathrm{Log}3)^{1-p}\right]$$

از این رو (۱) اگر $p>1$ آنگاه:

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{1-p}\left[0 - (\mathrm{Log}\mathrm{Log}3)^{1-p}\right]$$

یعنی، دنباله $\{I_n\}$ همگرااست. بنابراین، به استناد آزمون انتگرال، سری مفروض نیز همگرااست.

(۲): اگر $p<1$ آنگاه:

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \infty$$

یعنی دنباله $\{I_n\}$ واگرا به $+\infty$ است. بنابراین،به استنادآزمون انتگرال سری مفروض نیز واگرااست.

حالت دوم: $p=1$ در این حالت :

$$f(x) = \frac{1}{x\mathrm{Log}x\,(\mathrm{Log}\mathrm{Log}x)}$$

$$I_n = \int_3^n f(x)dx = \int_3^n \frac{1}{x\mathrm{Log}x\,(\mathrm{Log}\mathrm{Log}x)}\,dx = \int_3^n \frac{\frac{1}{x\mathrm{Log}x}}{\mathrm{Log}\mathrm{Log}x}\,dx$$

$$= \left[\mathrm{Log}(\mathrm{Log}\mathrm{Log}x)\right]_{۳}^{n} = \mathrm{Log}(\mathrm{Log}\mathrm{Log}n) - \mathrm{Log}(\mathrm{Log}\mathrm{Log}۳)$$

در نتیجه:

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \infty$$

یعنی ، $\{I_n\}$ واگرا به ∞ است. لذا به استناد آزمون انتگرال، سری مفروض نیز واگرا است.

نتیجه: سری مفروض به ازای $p>۱$ همگرا و به ازای $p\leq ۱$ واگرا می‌باشد.

==========

فصل سوم:

سریهای نامتناهی

« دنباله بحث »

۱.۳: بخش یک

سریهای توانی

تاکنون سریهایی مورد بحث قرار گرفته‌اند که جمل آنها اعداد حقیقی ثابت بوده است. اکنون یک نوع خاص از سریها، موسوم به سریهای توانی، را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که جمل آنها ثابت نیستند.

تعریف ۱:

فرض می‌کنیم $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد حقیقی و x یک متغیر باشد. آنگاه، سری:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

را یک سری توانی از x می‌نامند.

اگر x_0 یک عدد حقیقی ثابت باشد، سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ را یک سری توانی حول x_0 می‌نامند.

اگر $x_0 = 0$ ، سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ در می‌آید.

تعریف ۲:

همگرایی سری توانی: فرض می‌کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ یک سری توانی و α عددی حقیقی باشد.

الف: اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\alpha - x_0)^n$ به مجموع σ همگرا باشد. می‌گوییم سری توانی مفروض در $x=\alpha$ به مجموع σ همگراست.

ب: اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\alpha - x_0)^n$ واگرا باشد، می‌گوییم سری توانی مفروض به ازای $x=\alpha$ واگراست.

ج: سری توانی را در $x=\alpha$ همگرای مطلق می‌نامند در صورتیکه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\alpha - x)^n$ همگرای مطلق باشد

۲.۳: بخش دوم

قضیه: سری توانی $\sum a_n (x-x_0)^n$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\mu = \overline{\lim} \, |a_n|^{1/n}$ آنگاه:

الف: اگر $\mu = 0$ ، سری توانی به ازای هر مقدار x همگرای مطلق است.

ب: اگر $\mu = \infty$ ، سری توانی فقط در $x=x_0$ همگرااست.

ج: اگر $\mu \neq 0$ و ∞ ، سری توانی به ازای $|x-x_0| < \frac{1}{\mu}$ همگرای مطلق است.

د: اگر $\mu \neq 0$ و ∞ ، سری توانی به ازای $|x-x_0| > \frac{1}{\mu}$ واگرااست.

برهان الف: اگر $\mu = 0$ آنگاه:

$$\overline{\lim} |a_n(x-x_0)^n|^{1/n} = \overline{\lim} |a_n|^{1/n} |x-x_0| = \mu |x-x_0| = 0$$

یعنی:

$$\overline{\lim} |a_n(x-x_0)^n|^{1/n} = 0 < 1$$

بنابراین، به استناد آزمون ریشه کوشی ، سری $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ به ازای هر x همگرااست.

به عبارت دیگر، سری $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ به ازای هر x همگرای مطلق است

برهان ب: اگر $\mu = \infty$ و $x \neq x_0$ ، آنگاه:

$$\overline{\lim} |a_n(x-x_0)^n|^{1/n} = \overline{\lim} |a_n|^{1/n} |x-x_0| = \mu |x-x_0| = \infty > 1$$

در نتیجه، به استناد آزمون ریشه کوشی، سری توانی مفروض به ازای هر $x \neq x_0$ واگرااست.

برهان ج: اگر $\mu \neq 0$ و ∞ و $|x-x_0| < \frac{1}{\mu}$ ، آنگاه:

$$\overline{\lim} |a_n(x-x_0)^n|^{1/n} = \mu |x-x_0| < 1$$

در نتیجه به استناد آزمون ریشه کوشی، سری $\sum |a_n(x-x_0)^n|$ همگرا می‌باشد.

لذا، سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ به ازای $|x-x_0| < \frac{1}{\mu}$ همگرای مطلق است.

برهان د: اگر $\mu \neq 0$ و ∞ و $|x-x_0| > \frac{1}{\mu}$ ، آنگاه:

$$\overline{\lim} |a_n(x-x_0)^n|^{1/n} = \overline{\lim} |a_n|^{1/n} |x-x_0| = \mu |x-x_0| > 1$$

در نتیجه به استناد آزمون ریشه کوشی، سری توانی به ازای $|x-x_0| > \frac{1}{\mu}$ واگرااست.

۲.۳: بخش سوم

شعاع و بازه همگرایی:

تعریف ۱: اگر $\mu = \overline{\lim} |a_n|^{1/n}$ ، شعاع همگرایی سری توانی.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

راکه به r نشان می‌دهیم ، چنین تعریف می‌کنند:

اگر $\mu=\infty$ آنگاه $r=0$. اگر $\mu=0$ آنگاه $r=\infty$

اگر ∞ و $\mu\neq 0$ آنگاه $r=\frac{1}{\mu}$.

تعریف ۲: مجموعه نقاطی راکه در آن سری توانی بالا همگرااست بازه همگرایی این سری می‌نامند بنابراین، بازه همگرایی سری توانی در سه حالت بالا عبارت است از:

$\{x_0\}$ ،اگر $r=0$.

$(-\infty , \infty)$ ، اگر $r=\infty$

اگر ∞ و $r\neq 0$ ، بازه همگرایی یکی از چهار بازه (x_0-r , x_0+r) ، $[x_0-r , x_0+r)$ ، $(x_0-r , x_0+r]$ ، $[x_0-r , x_0+r]$ است. برحسب این که سری توانی مفروض در یک انتها یا هر دو انتهای بازه همگرا یا واگرا باشد. در این مورد به تبصره ۲ توجه کنید:

تبصره ۱: از تعاریف بخش سوم و احکام بخش دوم می‌توان نتیجه گرفت که هر سری توانی در داخل بازه همگرایی خود همگرای مطلق است و در خارج آن بازه واگرااست.

تبصره ۲: ممکن است یک سری توانی در نقاط انتهایی بازه همگرایی خود همگرا یا واگرا باشد. مثالهای زیر این نکته را به طور واضح نشان می‌دهند.

مثال ۱: سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ را در نظر می‌گیریم. از مقایسه آن با $\sum a_n(x-x_0)^n$ در می‌یابیم که $a_n=\frac{1}{n}$ ، $x_0=0$ بنابراین: $\mu = \lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1/n}} = 1$

در نتیجه شعاع همگرایی سری عبارت است از $r=\frac{1}{\mu}=1$ بنابراین بازه همگرایی سری یکی از چهار بازه $(-1,1)$ ، $[-1,1)$ ، $(-1,1]$ ، $[-1,1]$ است. برای تشخیص بازه همگرایی،کافی است در

همگرایی سری در نقاط انتهایی یعنی نقاط ۱ ، ۱- ، بحث کنیم.

اگر $x=1$ آنگاه $\Sigma x^n \frac{1}{n} = \Sigma \frac{1}{n}$ ، که واگرااست. اگر $x=-1$ آنگاه $\Sigma \frac{x^n}{n} = \Sigma \frac{(-1)^n}{n}$ که یک سری متناوب و، به استناد قضیه لایپنیتس ، همگرااست. از این رو، بازه همگرایی سری توانی مفروض عبارت است از $[-1,1)$.

مثال ۲: سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ را در نظر می‌گیریم. وآن را با سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ مقایسه می‌کنیم. در می یابیم که $x_0=0$, $a_n = \frac{1}{n^2}$ بنابراین:

$$\mu = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^{1/n}}\right)^2 = 1$$

در نتیجه، شعاع همگرایی عبارت است از $r = \frac{1}{\mu} = 1$ اما ملاحظه می‌کنیم که:

اگر $x=1$ آنگاه $\Sigma \frac{x^n}{n^2} = \Sigma \frac{1}{n^2}$ که همگرااست. اگر $x=-1$ آنگاه: $\Sigma \frac{x^n}{n^2} = \Sigma \frac{(-1)^n}{n^2}$ که همگرای مطلق است. از این رو، بازه همگرایی سری توانی مفروض عبارت است از $[-1,1]$

مثال ۳: سری $\Sigma \frac{x^{2n}}{2n}$ را در نظر می‌گیریم. از مقایسه آن با شکل کلی $\Sigma a_n (x-x_0)^n$ درمی‌یابیم که $x_0=0$, $a_0=0$. اگر n فرد باشد، $a_n=0$ و اگر n زوج باشد ، $a_n=\frac{1}{n}$

لذا $\lim_{n\to\infty} |a_{2n+1}|^{\frac{1}{2n+1}} = 0$, $\lim_{n\to\infty} |a_{2n}|^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n}} = 1$

از این رو: $\mu = \overline{\lim} |a_n|^{1/n} = 1$

بنابراین، شعاع همگرایی سری مفروض عبارت است از $r = \frac{1}{\mu} = 1$ چون سری در نقاط ۱ و ۱- واگرااست، بازه همگرایی عبارت است از $(-1,1)$.

مثال ۴: شعاع همگرایی سریهای زیر را پیداکنید:

الف: $1 + x + \frac{1}{2^2}x^2 + 3x^3 + \frac{1}{4^4}x^4 + 5x^5 + \dots$

ب: $x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + 4^4x^4 + 5x^5 + \dots$

ج: $\sum \left(\frac{۱\times۳\times۵\times \ldots (۲n-۱)}{۲\times۴\times۶\times \ldots (۲n)}\right)^{\alpha} n^{\beta} x^{n}$

د: $\sum \frac{\alpha(\alpha-۱)\ldots(\alpha-n+۱)}{n!} x^{n}$

حل (الف): دراین جا $a_۰=۱$ ، اگر n زوج باشد، $a_n=\frac{۱}{n^{n}}$ و اگر n فرد باشد، $a_n=n$

در نتیجه: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{۲n})^{\frac{۱}{۲n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{۱}{(۲n)^{۲n}}\right)^{\frac{۱}{۲n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{۱}{۲n}\right) = ۰$

و $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{۲n+۱}|^{\frac{۱}{۲n+۱}} = \lim\limits_{n\to\infty} (۲n+۱)^{\frac{۱}{۲n+۱}} = ۱$

بنابراین: $\mu = \overline{\lim} \, |a_n|^{۱/n} = ۱$

در نتیجه، شعاع همگرایی $r=\frac{۱}{\mu}=۱$ می‌باشد.

حل (ب): در این جا: اگر n فرد باشد، $a_n=n$ و اگر n زوج باشد، $a_n=n^{n}$

بنابراین: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{۲n})^{\frac{۱}{۲n}} = \lim\limits_{n\to\infty} [(۲n)^{۲n}]^{\frac{۱}{۲n}} = \lim\limits_{n\to\infty} ۲n = \infty$

و $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{۲n+۱}|^{\frac{۱}{۲n+۱}} = \lim\limits_{n\to\infty} (۲n+۱)^{\frac{۱}{۲n+۱}} = ۱$

لذا، $\mu = \lim |a_n|^{۱/n} = \infty$

در نتیجه، شعاع همگرایی $r=۰$ می‌باشد.

حل (ج): در این جا $a_n = \left[\frac{۱\times۳\times۵\times \ldots (۲n-۱)}{۲\times۴\times۶\times \ldots (۲n)}\right]^{\alpha} \times n^{\beta}$

با تبدیل n به n+۱ ، داریم: $a_{n+۱} = \left[\frac{۱\times۳\times۵\times \ldots \times(۲n+۱)}{۲\times۴\times۶\times \ldots \times(۲n+۲)}\right]^{\alpha} \times (n+۱)^{\beta}$

بنابراین: $\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \left(\frac{n+۱}{n}\right)^{\beta} \times \left(\frac{۲n+۲}{۲n+۱}\right)^{\alpha} = (۱+۱/n)^{\beta} \times \left(\frac{۱+۱/n}{۱+۱/۲n}\right)^{\alpha}$

در نتیجه: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = ۱$

لذا، به استناد قضیه کوشی: $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{۱/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = ۱$

از این رو: $\mu = \text{Lim}\,|a_n|^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 1$

بنابراین شعاع همگرایی $r=\frac{1}{\mu}=1$ می‌باشد.

حل (د): در این جا: $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$

بنابراین: $a_{n+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}$

در نتیجه: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha-n}{n+1}$

لذا، $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha/n-1}{1+1/n}\right| = 1$

بنابراین، به استناد قضیه کوشی، $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

از این رو: $\mu = \overline{\text{Lim}}\,|a_n|^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = 1$

در نتیجه، شعاع همگرایی سری مفروض $r=\frac{1}{\mu}=1$ می‌باشد.

مثال ۵: شعاع وبازه همگرایی سریهای زیر را تعیین کنید.

الف: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\left(\frac{x-5}{3}\right)^n$

ب: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$

ج: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,x^{2n-2}}{(2n-2)!}$

د: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

ه: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$

و: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\,x^{2n}$

ز: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\,x^n$

حل (الف): سری مفروض برابر است با:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}\,\left(\frac{x-5}{3}\right)^n = \sum \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{3^n}(x-5)^n$$

که از مقایسه آن با سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ داریم:

$$x_0=5 \quad ، \quad a_n = (-1)^n\sqrt{n}\cdot\frac{1}{3^n}$$

بنابراین ،

$$\overline{\lim}\,|a_n|^{1/n} = \overline{\lim}\left(\sqrt{n}\cdot\frac{1}{3^n}\right)^{1/n} = \overline{\lim}\,(n^{1/n})^{1/2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

لذا شعاع همگرایی $r=\frac{1}{\mu}=3$ می‌باشد. و بازه همگرایی عبارت است از:

$$(x_0-r \text{ و } x_0+r) = (2 \text{ و } 8)$$

توجه کنید که سری الف در نقاط انتهایی بازه همگرایی خود واگراست.

حل (ب): در این جا $x_0=0$ و $a_n=n!$. بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

لذا به استناد قضیه کوشی

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$$

از این رو:

$$\mu = \overline{\lim}\,|a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = \infty$$

در نتیجه، شعاع همگرایی برابر صفر است و بازه همگرایی عبارت است از $\{0\}$.

حل (ج): ملاحظه می‌کنیم که در این جا:

$$|a_n| = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \\ \frac{1}{n!} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \end{cases}$$

بنابراین:

$$|a_{2n+1}| = 0 \quad \text{و} \quad |a_{2n}| = \frac{1}{(2n)!}$$

با تبدیل n به $(n+1)$ ، داریم:

$$a_{2n+2} = \frac{1}{(2n+2)!}$$

لذا:

$$\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = \frac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{(2n)!}} = \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}$$

و $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0$

از این رو، به استناد قضیه کوشی، $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{2n}|^{1/2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right| = 0$

و $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{2n+1}|^{1/2n+1} = 0$

که نتیجه می شود: $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$

لذا: $\mu = \overline{\lim} |a_n|^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$

در نتیجه شعاع همگرایی برابر ∞ است و بازه همگرایی عبارت است از $(-\infty \text{ و } \infty)$

حل (د): ملاحظه می‌کنیم که:

$$|a_n| = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \frac{1}{n!} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \end{cases}$$

از اینرو: (۱) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{2n}|^{1/2n} = 0$

و $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{2n+3}}{a_{2n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2n+3)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0$$

که از آن، به استناد قضیه کوشی، نتیجه می‌گیریم که:

(۲): $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{2n+1}|^{\frac{1}{2n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}\right| = 0$

از (۱) و (۲) لازم می‌آید که: $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$

لذا: $\mu = \overline{\lim} |a_n|^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$

بنابراین شعاع همگرایی برابر ∞ است و بازه همگرایی عبارت است از $(-\infty , \infty)$.

حل (ه): در این جا $a_n = \frac{1}{n^n}$، بنابراین: $\mu = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n^n})^{1/n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

در نتیجه شعاع همگرایی برابر ∞ می‌باشد و بازه همگرایی عبارت است از $(-\infty$ و $\infty)$.

حل (و): در این جا $a_{2n} = n!$ ، $a_{2n+1} = 0$ بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

در نتیجه به استناد قضیه کوشی،

$$\lim_{n\to\infty} |a_{2n}|^{1/2n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right| = \infty$$

و بدیهی است که:

$$\lim_{n\to\infty} |a_{2n+1}|^{\frac{1}{2n+1}} = 0$$

بنابراین:

$$\mu = \overline{\lim} |a_n|^{1/n} = \infty$$

لذا شعاع همگرایی برابر است با ۰ و بازه همگرایی برابر است با $\{0\}$. (توجه کنید که $x_0 = 0$)

حل (ز): از مقایسه سری مفروض با سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ داریم:

$$x_0 = 0 \quad \text{و} \quad a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

از این رو،

$$a_{n+1} = \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{n+1}{2(2n+1)}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)}{2(2+1/n)} = \frac{1}{4}$$

در نتیجه، به استناد قضیه کوشی

$$\mu = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{4}$$

لذا شعاع همگرایی برابر است با $r = \frac{1}{\mu} = 4$ و بازه همگرایی عبارت است از $(-4 , 4)$

(توجه کنید که سری مفروض در نقاط انتهایی بازه (۴ و ۴-) واگرااست.)

مثال ۶: بازه همگرایی سریهای زیر را پیدا کنید.

(الف): $1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

(ب): $1 + 2x + 3x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$

حل (الف): در این جا $a_n = 1$ ، $x_0 = 0$ بنابراین : $\mu = \overline{\lim} \, |a_n|^{1/n} = 1$

از این رو، شعاع همگرایی برابر است با $r = \frac{1}{\mu} = 1$. چون این سری در نقاط ۱ و ۱- واگراست، نتیجه می‌گیریم که بازه همگرایی سری عبارت است از (۱ , ۱-)

حل (ب): در این جا $x_0 = 0$ ، $a_n = n+1$

بنابراین : $\mu = \overline{\lim} \, |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} n^{1/n} (1 + 1/n)^{1/n} = 1$

از این رو، شعاع همگرایی برابر است با $r = \frac{1}{\mu} = 1$. چون این سری در نقاط ۱ و ۱- واگراست، نتیجه می‌گیریم که بازه همگرایی سری عبارت است از (۱ و ۱-)

۴.۳: بخش چهارم

لم آبل: اگر (۱) $n = 1, 2, \ldots, p$ و $h \le \sum_{r=1}^{n} a_r \le H$

و (۲) $v_1 \ge v_2 \ge \ldots \ge v_p \ge 0$ آنگاه: (*) $hv_1 \le \sum_{n=1}^{p} a_n v_n \le Hv_1$

برهان: با فرض، (۳) $\text{Б}_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{r=1}^{n} a_r$

از (۱) نتیجه می‌شود که: (۴) $n = 1, 2, 3, \ldots, p$ و $h \le \text{Б}_n \le H$

از (۳) روابط زیر نیز عاید می‌شود: (۵) $a_1 = \text{Б}_1$ و $a_2 = \text{Б}_2 - \text{Б}_1, \ldots, a_p = \text{Б}_p - \text{Б}_{p-1}$

از (۲) نامساویهای زیر حاصل می‌شود:

(۶) $v_1 - v_2 \ge 0 \; , \; v_2 - v_3 \ge 0 \; , \; \ldots \; , \; v_{p-1} - v_p \ge 0 \; , \; v_p \ge 0$

حال از (۴) و (۵) و (۶) لازم می‌آید که: $\sum_{n=1}^{p} a_n v_n = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_p v_p$

$$= \sigma_1 v_1 + (\sigma_2-\sigma_1) v_2 + \ldots + (\sigma_p-\sigma_{p-1}) v_p$$

$$= \sigma_1 (v_1-v_2) + \sigma_2 (v_2-v_3) + \ldots + \sigma_{p-1} (v_{p-1}-v_p) + \sigma_p v_p$$

$$\geq h(v_1 - v_2) + h(v_2 - v_3) + \ldots + h(v_{p-1}-v_p) + hv_p = hv_1 \qquad (۷)$$

دوباره ، از (۴) ، (۵) ، (٦) نتیجه می‌شود که:

$$\sum a_n v_n \leq H(v_1-v_2) + H(v_2-v_3) + \ldots + H(v_{p-1}-v_p) + Hv_p$$

$$\leq H(v_1-v_2 + v_2-v_3 + \ldots + v_{p-1} - v_p + v_p) = Hv_1 \qquad (۸)$$

از (۷) و (۸) نامساوی‌های (*) به دست می‌آیند و برهان تمام است.

۵.۳: بخش پنجم

آزمون آبل: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا و دنباله $\{u_n\}$ یکنوا و کراندار باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ همگرا می‌باشد

برهان: دنباله $\{u_n\}$ ، یکنوا و کراندار است، پس همگرااست. اگر فرض کنیم $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ آنگاه:

اگر $\{u_n\}$ صعودی باشد. ، $u = Sup\ \{u_n \mid n = ۱،۲،\ldots\}$

(۱) اگر $\{u_n\}$ نزولی باشد. $u = Inf\ \{u_n \mid n = ۱،۲،\ldots\}$

حال، دنباله $\{V_n\}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$V_n = \begin{cases} u-u_n & , \text{ اگر } \{u_n\} \text{ صعودی باشد.} \\ u_n-u & , \text{ اگر } \{u_n\} \text{ نزولی باشد.} \end{cases} \qquad (۲)$$

بدیهی است که: (۳) دنباله $\{V_n\}$ نزولی است و همواره $V_n \geq ۰$

(زیرا مثلا ، اگر $\{u_n\}$ صعودی باشد آنگاه همواره $u_n \leq u_{n+1}$ لذا، همواره $-u_n \geq -u_{n+1}$ و در نتیجه $u-u_n \geq u-u_{n+1}$ و یا $V_n \geq V_{n+1}$ بحث در حالتی که $\{u_n\}$ نزولی باشد مشابه است)

از (۲) نتیجه می‌شود که: به ازای هر n ، $u_n = u \pm v_n$

پس از ضرب طرفین در a_n خواهیم داشت. $a_n u_n = a_n u \pm a_n v_n$

یا: $\sum a_n u_n = u \sum a_n \pm \sum a_n v_n$

چون بنابه فرض Σa_n همگرااست، برای آنکه ثابت کنیم که $\Sigma a_n u_n$ همگرااست، کافی است ثابت کنیم که سری $\Sigma a_n v_n$ همگرا می‌باشد.

چون Σa_n همگرااست، به استناد معیار کوشی، به ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض عددی طبیعی مانند p موجود است به طوری که:

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \frac{\varepsilon}{v_1} \qquad \text{به ازای هر } n > m \geq p \text{ ،}$$

[فرض می‌کنیم $v_1 > 0$. اگر $\{v_n\}$ دنباله ثابت صفر باشد، دنباله $\{u_n\}$ نیز ثابت و حکم بدیهی است]

در نتیجه از (۳) و لم آبل لازم می‌آید که:

$$|a_{m+1} v_{m+1} + \dots + a_n v_n| < \frac{\varepsilon}{v_1} v_{m+1}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{v_1} . v_1 = \varepsilon \quad ، \qquad \text{به ازای هر } n > m \geq p$$

بنابراین به استناد معیار کوشی ، سری $\Sigma a_n v_n$ همگرا و برهان تمام است.

مثال ۱: فرض می‌کنیم سری Σa_n همگرا باشد نشان دهید که هر یک از سریهای زیر نیز همگرا می‌باشد

الف): $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}\, a_n$ ب): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_n$ ج): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-p}$ ، $p \geq 0$

د): $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{Log} n} a_n$ هـ): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} a_n$ و): $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^n a_n$

حل: آزمون آبل را برای هر یک از سریهای فوق بکار می‌گیریم.

(الف): کافی است ثابت کنیم که دنباله $\{n^{1/n}\}$ نزولی است. ملاحظه می‌کنیم که:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + n . \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} . \frac{1}{n^2} + \dots + (\frac{1}{n})^n$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \dots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\dots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$\leq e < 3$$

از این رو، به ازای هر $n \geq 3$، داریم: $n > (1+\frac{1}{n})^n$

که از آن نامساویهای زیر نتیجه می‌شوند:

$$n^{1/n} > \frac{n+1}{n}$$

$$n . n^{1/n} > n+1$$

$$n^{\frac{n+1}{n}} > n+1$$

$$n^{1/n} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}} > 0 \qquad \text{به ازای هر } n \geq 3 \text{ ،}$$

لذا،دنباله $\{n^{1/n}\}$ نزولی و یکنوا می‌باشد. همچنین، این دنباله از پایین به صفر کراندار است. چون بنا به فرض، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا می‌باشد، به استناد آزمون آبل، سری $\sum a_n v_n = \sum \sqrt[n]{n}\, a_n$ نیز همگرا می‌باشد.

حل (ب): بدیهی است که: به ازای هر n ، $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

از این رو دنباله $\{u_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ نزولی است. این دنباله از پایین به صفر کراندار است.

چون بنا به فرض سری $\sum a_n$ همگرااست به استناد آزمون آبل سری $\sum a_n u_n = \sum \frac{a_n}{n}$ نیز همگرااست

حل (ج): چون $p \geq 0$ ، به ازای هر n ، $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{(n+1)^p}$

بنابراین، دنباله $\{u_n\} = \{\frac{1}{n^p}\}$ نزولی است. این دنباله از پایین به صفر کراندار است.

چون بنا به فرض سری $\sum a_n$ همگرااست، به استناد آزمون آبل سری $\sum a_n u_n = \sum \frac{a_n}{n^p}$ نیز همگرااست

حل (د): می‌دانیم که ، $\operatorname{Log} n < \operatorname{Log}(n+1)$

بنابراین به ازای هر $n \geq 2$ ، $\frac{1}{\operatorname{Log} n} > \frac{1}{\operatorname{Log}(n+1)} > 0$

لذا، دنباله $\{u_n\} = \{\frac{1}{\operatorname{Log} n}\}$ نزولی و از پایین کراندار است. چون، بنا به فرض، سری $\sum a_n$ همگرااست. به استناد آزمون آبل، سری: $\sum_{n=2}^{\infty} a_n u_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\operatorname{Log} n}$ نیز همگرااست.

حل (ه): می‌توان نوشت، $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$

از نامساویهای $1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1} > 1$ که به ازای هر عدد طبیعی n برقرارند، نتیجه می‌گیریم که دنباله $\{\frac{n+1}{n}\}$ نزولی و از پایین کراندار است. چون بنا به فرض، سری $\sum a_n$ همگرااست، به استناد آزمون آبل، سری $\sum \frac{n+1}{n} a_n$ نیز همگرااست.

حل (و): با فرض $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$ ملاحظه می‌کنیم که:

$$u_n = (1+\frac{1}{n})^n = 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$< 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\ldots+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\ldots(1-\frac{n}{n+1})$$

$$= (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = u_{n+1}$$

یعنی،دنباله $\{u_n\}$ صعودی است.

همچنین، به ازای هر n، $(1+\frac{1}{n})^n < e$

یعنی، $\{u_n\}$ از بالا کراندار است. از این رو، $\{u_n\}$ کراندار و یکنوا می‌باشد.

همچنین بنا به فرض، Σa_n همگرا می‌باشد.

بنابراین به استناد آزمون آبل، سری $\sum_{n=1}^{\infty} u_n a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n a_n$ نیز همگرا می‌باشد.

مثال ۲: نشان دهید که سری فوق همگرااست: $1-\frac{1}{4\times 3}+\frac{1}{4^2\times 5}-\frac{1}{4^3\times 7}+\ldots$

حل: با فرض $a_n = (-\frac{1}{4})^{n-1}$ ، ملاحظه می‌کنیم که $\Sigma|a_n|$ یک سری هندسی و همگرااست.
آنگاه: Σa_n نیز همگرا می‌باشد. حال فرض می‌کنیم $u_n = \frac{1}{2n-1}$. آنگاه:

به ازای هر n ، $u_n > 0$

وبه ازای هر n ، $u_n - u_{n+1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} > 0$

یعنی ، به ازای هر n ، $u_n > u_{n+1}$

از این رو دنباله $\{u_n\}$ نزولی و از پایین کراندار است.در نتیجه، به استناد آزمون آبل، سری $\Sigma a_n u_n$ که همان سری مفروض است، همگرا می‌باشد.

روش دیگر: اگر سری مفروض را به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ در نظر بگیریم، آنگاه:

$$v_n = (-\frac{1}{4})^{n-1}\cdot\frac{1}{2n-1}$$

بنابراین: $|v_n| = (\frac{1}{4})^{n-1}\cdot\frac{1}{2n-1}$

با تبدیل n به n+۱ داریم: $|v_{n+1}| = (\frac{1}{4})^n \cdot \frac{1}{2n+1}$

لذا: $\left|\frac{v_n}{v_{n+1}}\right| = (\frac{1}{4})^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{2n+1}{(1/4)^n} = 4\frac{2n(1+1/2n)}{2n(1-1/2n)}$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{v_n}{v_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{4(1+1/2n)}{(1-1/2n)} = 4 > 1$$

در نتیجه به استناد آزمون نسبت، سری $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ نیز همگرااست.

۶.۳ : بخش ششم

آزمون دیریکله : فرض کنید دنباله مجموعهای جزئی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ کراندار باشد. اگر دنباله $\{V_n\}$ یکنوا و همگرا به صفر باشد آنگاه سری $\sum a_n v_n$ همگرااست.

برهان: فرض می‌کنیم $\{V_n\}$ نزولی باشد. (در حالتی که $\{v_n\}$ صعودی باشد، می‌توانیم استدلال را با $\{-v_n\}$ که نزولی است، تکرار کنیم.) اگر $\{V_n\}$ دنباله ثابت صفر باشد، حکم بدیهی است. فرض می‌کنیم $\{V_n\}$ دنباله ثابت صفر نباشد. چون این دنباله یکنوا همگرا به صفر فرض شده است، الزاما اکیدا نزولی است و همه جمل آن مثبت می‌باشند. اگر تعریف کنیم:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

بنا به فرض، $\{S_n\}$ کراندار است. یعنی عددی مثبت مانند k موجود است به طوری که:

$$|S_n| \le k \quad , \quad n \in N \quad \text{به ازای هر} \qquad (1)$$

از این رو، به ازای هر دو عدد طبیعی m ، n که n>m داریم:

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| = |S_n - S_m| \le |S_n| + |S_m| \le 2k$$

از طرف دیگر، فرض $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ ایجاب می‌کند که به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض عددی طبیعی مانند p موجود باشد به طوری که:

$$v_n \le \frac{\varepsilon}{2k} \quad , \quad n \ge p \quad \text{به ازای هر} \qquad (2)$$

چون $\{v_n\}$ دنباله ای نزولی از اعداد نامنفی است، از (۱) و (۲) و آزمون آبل نتیجه می‌گیریم که:

$$|a_{m+1} \cdot v_{m+1} + a_{m+2} \cdot v_{m+2} + \ldots + a_n v_n| \le 2k\, v_{m+1}$$

به ازای هر: $n > m \ge p$ ، $< \varepsilon$

که نشان می‌دهد که سری $\sum a_n v_n$ همگرااست.

مثال ۱: نشان دهید که اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ دارای مجموع جزئی کراندار باشد آنگاه، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-t}$ به ازای $t>s$ همگرااست.

حل: می‌توان نوشت:

$$\frac{a_n}{n^t} = \frac{a_n}{n^s} \cdot \frac{1}{n^{t-s}}$$

چون $t-s>0$ ، دنباله $\{1/n^{t-s}\}$ نزولی و از پایین کراندار است. علاوه براین، بنا به فرض، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ دارای مجموعهای جزئی کراندار است. از این رو به استناد آزمون دیریکله، سری، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n . n^{-s} . n^{s-t} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-t}$ همگرا می‌باشد.

۷.۳ بخش هفتم

در این جا توجه خواننده را به دو فرمول مهم مثلثات جلب می‌کنیم:

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \ldots + \sin(\alpha+(n-1)\beta) \qquad (1)$$

$$= \frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \sin\left[\alpha+(n-1)\frac{\beta}{2}\right] \quad , \quad \sin\frac{\beta}{2} \neq 0$$

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \ldots + \cos(\alpha+(n-1)\beta) \qquad (2)$$

$$= \frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \cos\left[\alpha+(n-1)\frac{\beta}{2}\right] \quad , \quad \sin\frac{\beta}{2} \neq 0$$

مثال ۲: اگر $\{v_n\}$ دنباله ای نزولی و همگرا به صفر باشد آنگاه:

الف: سری $\sum v_n \sin n\theta$ به ازای همه مقادیر حقیقی θ همگرااست.

ب: اگر θ مضرب صحیحی از 2π نباشد، سری $\sum v_n \cos\theta$ نیز همگرا می‌باشد.

حل (الف): اگر θ مضرب صحیحی از 2π باشد، هر جمله سری برابر صفر و، از این رو سری همگرااست.

اگر θ مضرب صحیحی از 2π نباشد، $\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$ و به استناد فرمول (۱):

$$\left| \sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta \right| = \left| \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\ \sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$$

این نشان می دهد که سری $\sin\theta + \sin 2\theta + \ldots$ دارای مجموعهای جزئی کراندار است. چون بنا به فرض، $\{V_n\}$ یکنوا و همگرا به صفر است، به استناد آزمون دیریکله سری $\sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin\theta$ همگرااست.

حل (ب): اگر θ مضرب صحیحی از 2π نباشد، مجددا $\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$ و به استناد فرمول (۲):

$$\left| \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta \right| = \left| \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\ \cos\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$$

یعنی، سری $\cos\theta + \cos 2\theta + \ldots$ دارای مجموعهای جزیی کرانداراست. بنابراین،با تکرار برهان (الف) معلوم می‌شود که سری $\sum v_n \cos n\theta$ همگرااست.

مثال ۳: در مورد همگرایی سری زیر بحث کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \sin(n\theta + \alpha)$$

حل: اگر فرض کنیم $V_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$ ، $n \in N$

خواهیم داشت:

$$V_n - V_{n+1} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\left(1 + \ldots + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{(n+1)^2} > \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n+1-n}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)^2} > 0$$

یعنی، دنباله $\{v_n\}$ نزولی است. همچنین، به استناد مثال ٦ بخش ۲۵ ،

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1/2 + \ldots + 1/n}{n} = 0$$

یعنی:

$$\lim_{n\to\infty} v_n = 0$$

حال اگر θ مضرب صحیحی از 2π نباشد، آنگاه به استناد فرمول (۱):

$$\left| \sin(\theta+\alpha) + \ldots + \sin(n\theta+\alpha) \right| = \left| \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\,\sin\left(\alpha+\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} \right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$$

یعنی، سری $\sin(\theta+\alpha) + \ldots + \sin(n\theta+\alpha)$ دارای مجموعهای جزیی کراندار است. در نتیجه به استناد آزمون دیریکله، سری مفروض همگرا می‌باشد.

اگر θ مضرب صحیحی از 2π باشد، آنگاه $\sin(n\theta+\alpha) = \sin\alpha$ و از این رو سری مفروض برابر می شود با:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \sin\alpha$$

و بحث به دو حالت خاص زیر محدود می‌شود:

حالت خاص (۱): اگر α مضرب صحیحی از π باشد، آنگاه $\sin\alpha = 0$ بنابراین، هر جمله از سری فوق برابر صفر است. در نتیجه سری همگرا به صفر است.

حالت خاص (۲): اگر α مضرب صحیحی از π نباشد، آنگاه $\sin\alpha \neq 0$. در این حالت، ملاحظه می‌کنیم که:

$$\frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n}$$

چون سری $\sum \frac{1}{n}$ واگراست. (آزمون p با $p=1$) به استناد آزمون مقایسه، سری $\sum v_n$ نیز واگرااست. در نتیجه، سری $\sum v_n \sin\alpha$ نیز واگرااست.

بنابراین : سری مفروض واگرااست در صورتی که θ مضرب صحیحی از 2π نباشد ولی α مضرب صحیحی از π باشد.

مثال ۴: فرض کنید دنباله $\{v_n\}$ یکنوا و همگرا به صفر باشد. با استفاده از آزمون دیریکله، نشان دهید که سری $v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \ldots$ همگرااست.

حل: بنا به فرض، دنباله $\{v_n\}$ یکنوا و همگرا به صفر می‌باشد. همچنین، سری :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1-1+1-1+\ldots$$

دارای مجموعهای جزئی کراندار است. در نتیجه، به استناد آزمون دیریکله، سری مقابل همگرا می‌باشد.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} v_n = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \ldots$$

مثال ۵: نشان دهید که سریهای زیر همگرایند:

(الف): α عددی طبیعی نیست ، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\alpha}$

(ب): α یک عدد صحیح منفی نیست ، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+\alpha}$

حل (الف): سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1-1+1-1+\dots$ دارای مجموعهای جزئی کراندار است. همچنین، دنباله $\{v_n\} = \{\frac{1}{n-\alpha}\}$ نزولی و همگرا به صفر است. در نتیجه ، با استناد به آزمون دیریکله، سری مفروض همگرا می‌باشد.

حل (ب): مشابه است و به متعلمین واگذار می‌شود.

مثال ۶: فرض کنید $p>0$ نشان دهید که:

الف: سری $\sum\frac{\sin n\theta}{n^p}$ به ازای تمام مقادیر θ همگرااست.

(ب: اگر θ مضرب صحیحی از 2π نباشد، سری $\sum\frac{\cos n\theta}{n^p}$ همگرااست.

ج: سری $\sum\frac{(-1)^n \sin n\theta}{n^p}$ به ازای همه مقادیر θ همگرااست.

د: اگر $\theta \neq (2k+1)^p$ ، سری $\sum\frac{(-1)^n \cos n\theta}{n^p}$ همگرااست.

حل (الف): دنباله $\{v_n\} = \{\frac{1}{n^p}\}$ نزولی و همگرا به صفر است. از این رو، به استناد مثال ۲ ، سری $\sum v_n \sin n\theta = \sum\frac{\sin n\theta}{n^p}$ همگرااست. (حل ب مشابه است و به متعلمین واگذار می‌شود)

حل (ج): دنباله $\{v_n\} = \{\frac{1}{n^p}\}$ نزولی و همگرا به صفراست. اگر $\theta \neq (2k+1)\pi$ آنگاه:

$$|-\sin\theta + \sin 2\theta + \dots + (-1)^n \sin n\theta|$$

$$= |\sin(\pi+\theta) + \sin(2\pi+2\theta) + \dots + \sin(n\pi+n\theta)|$$

$$= \left|\frac{\sin\frac{n}{2}(\pi+\theta) + \sin\left(\frac{n+1}{2}\right)(\pi+\theta)}{\sin\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\pi+\theta}{2}\right|}$$

از این رو دنباله مجموعهای جزئی سری $\sum (-1)^n \sin n\theta$ کراندار است. بنابراین، به استناد مثال (۲) سری $\sum v_n (-1)^n \sin n\theta = \sum \frac{(-1)^n \sin n\theta}{n^p}$ همگرااست. (البته با فرض $\theta \neq (2k+1)\pi$)

حل (د) مشابه حل (ج) می‌باشد و به متعلم واگذار می‌شود.

مثال ۷: در مورد همگرائی سریهای زیر بحث کنید:

(الف): $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cos n\theta$

(ب): $\sum = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sin n\theta$

حل (الف): با فرض $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ داریم: $a_{n+1} = \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2n(1+1/n)\, 2n(1+1/2n)}{n^2(1+1/n)^2}$$

$$= \frac{4(1+1/n)(1+1/2n)}{(1+1/n)^2} = \frac{4(1+1/2n)}{(1+1/n)}$$

بنابراین: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 4 > 1$

لذا، به استناد آزمون نسبت، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا می‌باشد. همگرایی این سری ایجاب می‌کند که: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

چون $\{a_n\}$ دنباله ای از اعداد مثبت و همگرا به صفر است، نزولی است. از این رو، به استناد مثال ۲ اگر θ مضرب صحیحی از 2π نباشد. سری $\sum a_n \cos n\theta$ همگرااست. اگر θ مضرب صحیحی از 2π باشد آنگاه: $\sum a_n \cos n\theta = \sum a_n$ که همگرااست.

حل (ب): به دلیل مشابه سری (ب) به ازای همه مقادیر θ همگرااست.

روش حل دیگر: مجددا بافرض $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ، ملاحظه می‌کنیم که، مثلا، $|a_n \cos\theta n| \leq n a$ چون سری $\sum a_n$ همگرااست، سری $\sum a_n \cos n\theta$ مطلقا همگرا و، در نتیجه، همگرااست.

۸.۳: بخش هشتم

تجدید آرایش (جمل) سری: یک تجدید آرایش سری مفروض $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سری دیگری است به شکل $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ با همان جمل سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ که به ترتیب متفاوتی ظاهر شده باشد.

به عنوان مثال، سری $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \dots$ یک تجدید آرایش سری زیر است:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

۹.۳: بخش نهم

قضیه: اگر یک سری مطلقا همگرا باشد، سری متشکل از جمل نامنفی آن همگرااست. همچنین، سری متشکل از جمل منفی آن نیز همگرااست.

برهان: فرض می‌کنیم Σu_n سری مفروض می‌باشد،

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \qquad (1)$$

$$\sigma_n = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| \qquad (2)$$

اگر $P(n)$ و $Q(n)$ ، به ترتیب، مجموع جمل نامنفی و منفی S_n باشند، آنگاه، به استناد (۱) و (۲):

$$S_n = P(n) + Q(n) \qquad (3)$$

$$\sigma_n = P(n) - Q(n) \qquad (4)$$

از جمع (۳) و (۴) خواهیم داشت:

$$P(n) = \frac{S_n + \sigma_n}{2} \qquad (5)$$

$$Q(n) = \frac{S_n - \sigma_n}{2} \qquad (6)$$

بنابه فرض، سریهای Σu_n و $\Sigma |u_n|$ همگرایند، از این رو، دنباله‌های $\{S_n\}$ ، $\{\sigma_n\}$ همگرایند.

اگر فرض کنیم $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ و $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ ، از (۵) و (۶) نتیجه می‌شود که :

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \frac{s+\sigma}{2} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} Q(n) = \frac{s-\sigma}{2}$$

و برهان تمام است.

۱۰.۳: بخش دهم

قضیه: هر سری حاصل از تجدید آرایش یک سری مطلقا همگرا، همگرااست، و مجموع سری پس

از تجدید آرایش ثابت می‌ماند.

برهان: فرض می‌کنیم Σu_n سری مفروض باشد. سری حاصل از تجدید آرایش را به $\Sigma u'_n$ نمایش می‌دهیم. در این صورت، هر u با یک u' برابر است و هر u' با یک u، ملاحظه می‌کنیم که:

اگر $u_n \geq 0$ آنگاه $|u_n| = u_n$ و بنابراین: $u_n + |u_n| = u_n + u_n = 2|u_n|$

اگر $u_n < 0$ آنگاه $|u_n| = -u_n$ و بنابراین: $u_n + |u_n| = u_n - u_n = 0 \leq 2|u_n|$

در هر صورت نامساویهای زیر را داریم: (۱) $0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n|$

بنا به فرض، سری $\Sigma |u_n|$ همگرااست. فرض می‌کنیم (۲) $\Sigma |u_n| = s_1$

حال از (۱) و (۲) و آزمون مقایسه نتیجه می‌گیریم که سری $\Sigma (u_n + |u_n|)$ همگرااست. فرض می‌کنیم (۳) $\Sigma (u_n + |u_n|) = s_2$

از (۲) و (۳) لازم می‌آید که: (۴) $\Sigma u_n = s_2 - s_1$

چون $\Sigma |u_n|$ و $\Sigma (u_n + |u_n|)$ دو سری باجمل نامنفی هستند، مجموع آنها پس از تجدید آرایش ثابت می‌ماند. (قضیه ۹.۳)، یعنی، مجموع سری $\Sigma |u'_n|$، که حاصل از تجدید آرایش سری $\Sigma |u_n|$ می‌باشد، همان s_1 است. به طور مشابه، مجموع سری $\Sigma (u'_n + |u'_n|)$ برابر s_2 است.

از این رو، $\Sigma u'_n = \Sigma (u'_n + |u'_n|) - \Sigma |u'_n| = s_2 - s_1$. از این و (۴) لازم می‌آید که:

$\Sigma u'_n = \Sigma u_n$ و برهان تمام است.

۱۱.۳: بخش یازدهم

ضرب سریها: حاصل ضرب دو سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ بنا به تعریف، سری ΣC_n است که در آن:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = \Sigma a_k b_{n-k}$$

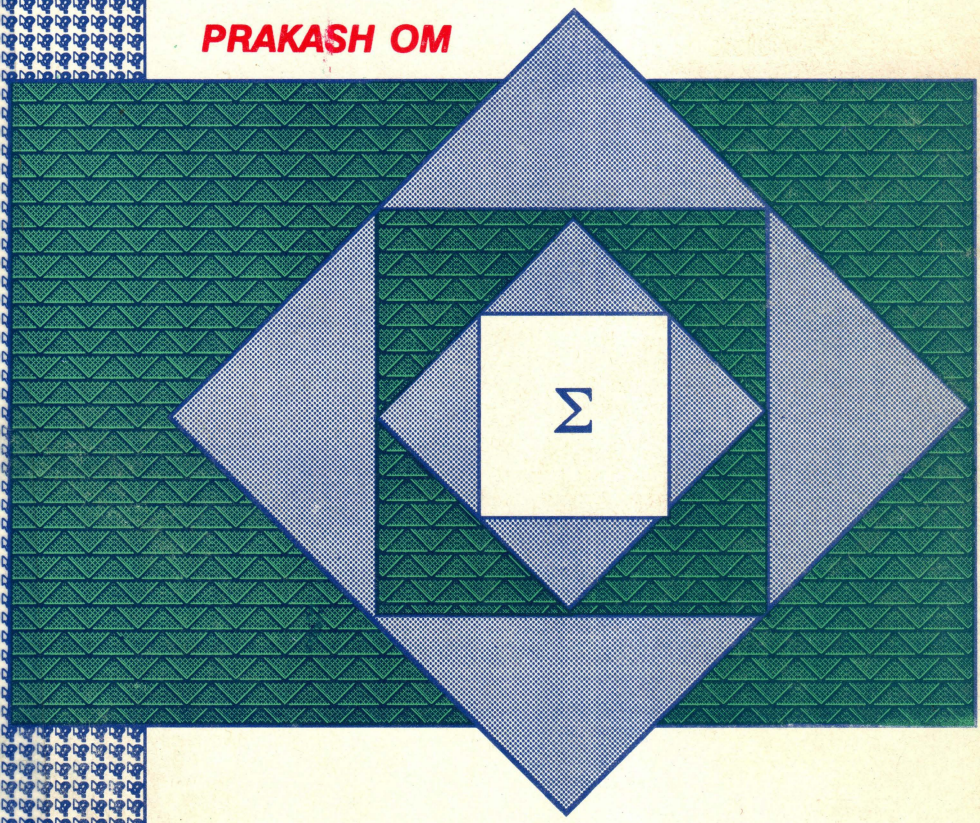
تبصره: ممکن است سریهای Σa_n و Σb_n همگرا باشند ولی حاصل ضرب آنها همگرا نباشد. بااین وجود قضیه زیر را داریم که آن را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه: حاصل ضرب هر دو سری مطلقا همگرا، مطلقا همگرااست، و مقدار سری حاصل ضرب برابر است، با حاصل ضرب مقادیر دو سری.

کتابخانه مجازی ریاضیات

SEQUENCES AND SERIES

PRAKASH OM



TRANSLATED BY:

Amir Daneshgar